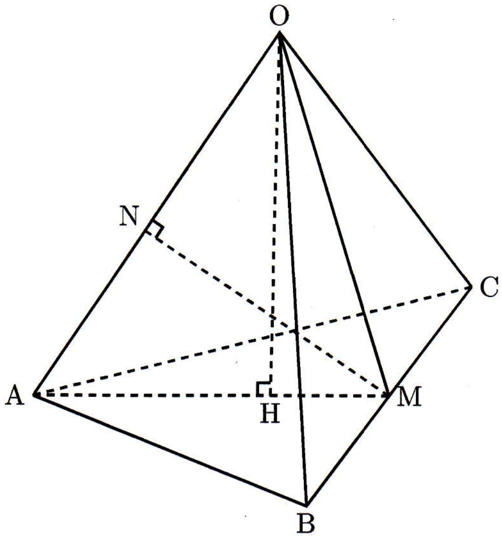
下の図のように，すべての辺の長さが 2 cm の正三角錐 OABC がある。線分 BC の中点を M，点 M から線分 OA にひいた垂線と線分 OA との交点を N，頂点 O から線分 AM にひいた垂線と線分 AM との交点を H とする。また，線分 OH と線分 MN の交点を L とする。(1)〜(4) に答えなさい。



(1) 線分 OM，線分 MN の長さをそれぞれ求めなさい。

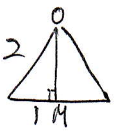
(2) △OAH ∽ △MAN を証明しなさい。

(3) 正三角錐 OABC の体積を求めなさい。

(4) △OMA において，∠OAM の大きさを a 度とするとき，∠HNM の大きさを a を用いて表しなさい。

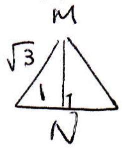
〔H25 徳島〕

(1) OM



$\sqrt{3}$ cm

MN



$\sqrt{2}$ cm

(2) △OAH と △MAN において

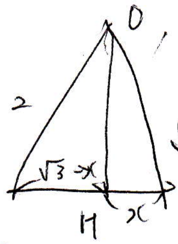
∠OHA = ∠MNA = 90° —①

∠OAH = ∠MAN —②

①，②より 2組の角がそれぞれ等しいので

△OAH ∽ △MAN

(3) $2 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times OH \times \frac{1}{3}$



$2^2 - (\sqrt{3}-x)^2 = (\sqrt{3})^2 - x^2$

$4 - (3 - 2\sqrt{3}x + x^2) = 3 - x^2$

$4 - 3 + 2\sqrt{3}x \cancel{- x^2} = 3 \cancel{- x^2}$

$2\sqrt{3}x = 2$

$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$OH = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$

$= \sqrt{3 - \frac{1}{3}}$

$= \sqrt{\frac{8}{3}}$

$= \frac{2\sqrt{6}}{3}$ … OH

$\cancel{2}\sqrt{3} \times \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{18}}{9} = \frac{6\sqrt{2}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm³

(4)は次の頁

(4) は円周角の定理の逆を使う問題。$\angle\mathrm{MNO} = \angle\mathrm{OHM} = 90^\circ$ であるから，4 点 O,N,H,M は同一円周上にある。従って $\angle\mathrm{HNM} = \angle\mathrm{HOM}$ となる。また，$\angle\mathrm{OAM} = \angle\mathrm{AOM} = a^\circ$ であるから，$\angle\mathrm{OMA} = (180-2a)^\circ$ である。ここで，$\triangle\mathrm{OHM}$ は直角三角形であるから，内角の和の関係より，$\angle\mathrm{HOM} = 90 - (180 - 2a) = (2a - 90)$
つまり，$\angle\mathrm{HNM} = (2a - 90$ 度)