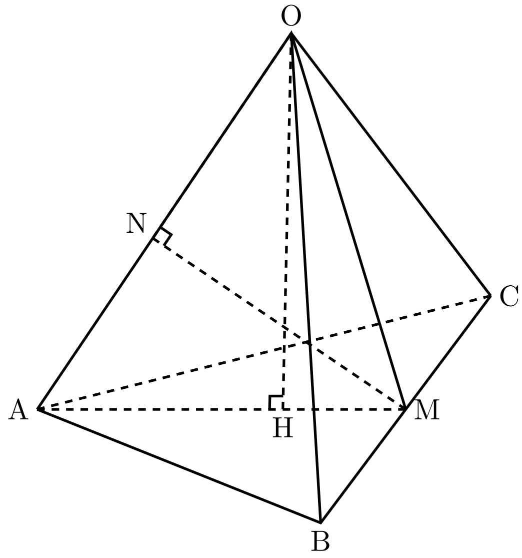
下の図のように, すべての辺の長さが 2 cm の正三角錐 OABC がある。線分 BC の中点を M, 点 M から線分 OA にひいた垂線と線分 OA との交点を N, 頂点 O から線分 AM にひいた垂線と線分 AM との交点を H とする。また, 線分 OH と線分 MN の交点を L とする。(1)〜(4) に答えなさい。



(1) 線分 OM, 線分 MN の長さをそれぞれ求めなさい。

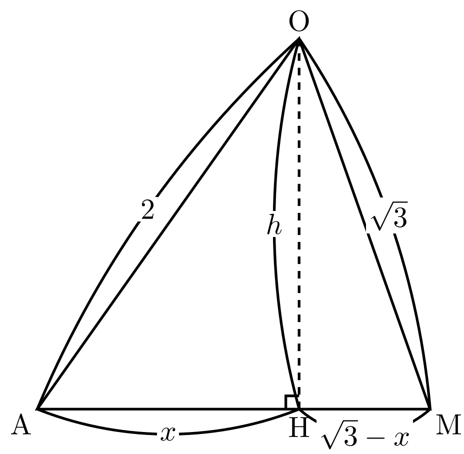
(2) $\triangle$OAH $\backsim$ $\triangle$MAN を証明しなさい。

(3) 正三角錐 OABC の体積を求めなさい。

(4) $\triangle$OMA において, $\angle$OAM の大きさを a 度とするとき, $\angle$HNM の大きさを a を用いて表しなさい。

〔H25 徳島〕

(3) では計算力のいる問題になっている。3 辺が分かっている三角形の面積は必ず求めることができるというのは, 中学生で学んでおくべきである。3 辺が分かっている三角形の面積を求めるのに有名なのがヘロンの公式というものがあるが, ここではあくまで, そのような知識がなくてもどうやって解くのかを検証してみたい。右の図のように求める立体の高さを h とおき, AH$=x$ とおくと, 図のように書くことができる。ここで高さ h を三平方の定理を用いて 2 通りの表し方で表すと,



$h^2=2^2-x^2\ \cdots$①

$h^2=\sqrt{3}^2-(\sqrt{3}-x)^2\ \cdots$②

①, ②は等しいので,

$2^2-x^2=\sqrt{3}^2-(\sqrt{3}-x)^2$ これを解いて

$x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\ \cdots$③ よって, ③を①に代入すると

$h^2=4-\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$h=\sqrt{\dfrac{8}{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\ \cdots$(高さ)

従って求める体積は,

1 辺 2 cm の正三角形の面積が, $2\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$ であるから, 次の式で求めることができる。

$\sqrt{3}\times\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(\mathrm{cm}^3)\cdots$(答)

(4) は円周角の定理の逆を使う問題。$\angle\mathrm{MNO} = \angle\mathrm{OHM} = 90^\circ$ であるから, 4 点 O,N,H,M は同一円周上にある。従って $\angle\mathrm{HNM} = \angle\mathrm{HOM}$ となる。また, $\angle\mathrm{OAM} = \angle\mathrm{AOM} = a^\circ$ であるから, $\angle\mathrm{OMA} = (180-2a)^\circ$ である。ここで, $\triangle\mathrm{OHM}$ は直角三角形であるから, 内角の和の関係より, $\angle\mathrm{HOM} = 90 - (180 - 2a) = (2a - 90)$
つまり, $\angle\mathrm{HNM} = 2a - 90$(度)