12センターⅡB
3 1/2

$\{a_n\}$ を $a_2 = -\frac{7}{3}$, $a_5 = -\frac{25}{3}$ である等差数列とし，自然数 n に対して，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく。

$a_1 = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，$\{a_n\}$ の公差は $\boxed{\text{エオ}}$ である。したがって

$$a_n = \boxed{\text{カキ}}\,n + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$S_n = \boxed{\text{コ}}\,n^2 + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\,n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

である。

ヒラメかないときは実験

1, 3, 5, 7 間は3つ!

$a_2\ a_3\ a_4\ a_5$

$-\frac{25}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{18}{3} = -6$

$-6 \div 3 = -2$ … 公差 (エオ)

$a_2 - (-2) = a_1$ より $a_1 = -\frac{1}{3}$ … アイウ

$a_n = -2n + \frac{5}{3}$ … カキクケ

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} -2n + \frac{5}{3}$

$= -2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{5}{3}n$

$= -n^2 - n + \frac{5}{3}n$

$= -n^2 + \frac{2}{3}n$ … コサシ

12センター IIB

3　2/2

次に，数列 $\{b_n\}$ は

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{4}{3}b_n + S_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たすとする。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。①から，$b_1 = \boxed{ス}$ である。さらに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} b_k = \sum_{k=1}^{n} b_k + b_{n+1}$ に注意して，①を利用すると

$$b_{n+1} = \boxed{セ}b_n + \boxed{ソ}n + \boxed{タ} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立ち，この等式は

$$b_{n+1} + \boxed{チ}(n+1) + \boxed{ツ}$$
$$= \boxed{セ}\left(b_n + \boxed{チ} + \boxed{ツ}\right)$$

nぬけ

と変形できる。ここで

$$c_n = b_n + \boxed{チ} + \boxed{ツ} \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

とおくと，$\{c_n\}$ は $c_1 = \boxed{テ}$，公比が $\boxed{ト}$ の等比数列であるから，②により

$$b_n = \boxed{ナ}^{\boxed{ニ}} - \boxed{ヌ}n - \boxed{ネ} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

である。ただし，$\boxed{ニ}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

① $n-2$　　② $n-1$　　③ n　　④ $n+1$　　⑤ $n+2$

⓪　　①　　②

0から

$b_1 = \frac{4}{3}b_1 - 1 + \frac{2}{3}$　　$-\frac{1}{3}b_1 = -\frac{1}{3}$　　∴ $b_1 = 1$ …ス

$\frac{4}{3}b_{n+1} + S_{n+1} = \frac{4}{3}b_n + S_n + b_{n+1}$

$\frac{4}{3}b_{n+1} - (n+1)^2 + \frac{2}{3}(n+1) = \frac{4}{3}b_n - n^2 + \frac{2}{3}n + b_{n+1}$

$\frac{1}{3}b_{n+1} = \frac{4}{3}b_n + 2n + \frac{1}{3}$　　∴ $b_{n+1} = 4b_n + 6n + 1$ …セソタ

$b_{n+1} + a(n+1) + b = 4(b_n + an + b)$ より　$3a = 6$ ∴ $a = 2$，$3b - a = 1$ より $b = 1$

∴ チ $= 2$　ツ $= 1$　　$C_n = b_n + 2n + 1$ で $C_1 = b_1 + 3 = 4$ …テ

∴ C_nは初項4，公比4の等比数列　ト

$C_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$

$b_n + 2n + 1 = 4^n$ より

$b_n = 4^n - 2n - 1$ …ナ＝ヌネ　②

ニは②