15センター ⅡB

1-1

ずらない

Oを原点とする座標平面上の2点 $\mathrm{P}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$, $\mathrm{Q}(2\cos\theta+\cos 7\theta,\ 2\sin\theta+\sin 7\theta)$ を考える。ただし, $\frac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ とする。

(1) $\mathrm{OP}=$ $\boxed{\text{ア}}$, $\mathrm{PQ}=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。また

$$\mathrm{OQ}^2 = \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}(\cos 7\theta\cos\theta + \sin 7\theta + \sin)$$
$$= \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}\cos\left(\boxed{\text{オ}}\theta\right)$$

である。

よって, $\frac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ の範囲で, OQ は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ をとる。

$OP = \sqrt{4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta} = 2$ …ア

$PQ = \sqrt{\cos^2 7\theta + \sin^2 7\theta} = 1$ …イ

$OQ^2 = (2\cos\theta + \cos 7\theta)^2 + (2\sin\theta + \sin 7\theta)^2$

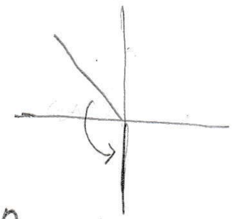
$= 4\cos^2\theta + 4\cos\theta\cos 7\theta + \cos^2 7\theta + 4\sin^2\theta + 4\sin\theta\sin 7\theta + \sin^2 7\theta$

$= 5 + 4(\cos 7\theta\cos\theta + \sin 7\theta\sin\theta)$ 加法定理より

ウ エ

$= 5 + 4\cos 6\theta$ …①

オ



$\frac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ より 6θ の範囲は $\frac{3}{4}\pi \leqq 6\theta \leqq \frac{3}{2}\pi$

このとき $-1 \leqq \cos 6\theta \leqq 0$ で $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 0

となる

よって $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき $OQ^2 = 5$ より $\sqrt{5}$

カ キ

15センター数B
1-1

(2) 3 点 O, P, Q が一直線上にあるような θ の値を求めよう。

直線 OP を表す方程式は $\boxed{\text{ク}}$ である。$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを, 次の ⓪～③ のうちから一つ選べ。

⓪ $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 0$　　① $(\sin\theta)x + (\cos\theta)y = 0$

② $(\cos\theta)x - (\sin\theta)y = 0$　　③ $(\sin\theta)x - (\cos\theta)y = 0$

このことにより, $\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で, 3 点 O, P, Q が一直線上にあるのは $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときであることがわかる。

(3) $\angle$OQP が直角となるのは OQ$=\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ のときである。したがって, $\dfrac{\pi}{8}\theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で, $\angle$OQP が直角となるのは $\theta = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$ のときである。

訂正

〔15 センター試験〕

(2) $y=ax$ に $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ を代入すると

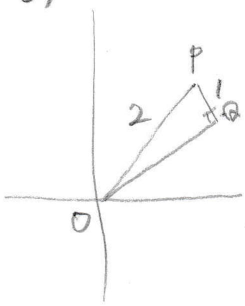
$2\sin\theta = 2a\cos\theta$ ∴ $a=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ となり $y=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}x$

∴ $\sin\theta x - \cos\theta y = 0$ …③…ク　これにQを代入して

$\cancel{2\sin\theta\cos\theta} + \sin\theta\cos 7\theta - \cancel{2\sin\theta\cos\theta} - \sin 7\theta\cos\theta = 0$

∴ $\sin\theta\cos 7\theta = \sin 7\theta\cos\theta$ より $\tan\theta = \tan 7\theta$　∴ $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ …ケ

(3)



三平方の定理より

$OQ = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ …コ

これと①より

$5 + 4\cos 6\theta = 3$

∴ $\cos 6\theta = -\dfrac{1}{2}$　∵ $\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$

$6\theta = \dfrac{4}{3}\pi$ ∴ $\theta = \dfrac{2}{9}\pi$ …サシ