

2015 IB^{1/2} -2

a, b を正の実数とする。連立方程式

$$(*) \begin{cases} x\sqrt{y^3} = a \\ \sqrt[3]{xy} = b \end{cases}$$

を満たす実数 x, y について考えよう。

(1) 連立方程式 (*) を満たす正の実数 x, y は

$$x = a^{\boxed{\text{ア}}} b^{\boxed{\text{イウ}}}, y = a^p b^{\boxed{\text{エ}}}$$

となる。ただし、

$$p = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

である。

$$x^2 y^3 = a^2 \dots ①$$

$$x y^3 = b^3 \dots ② \quad \text{= ①より } x b^3 = a^2 \quad \therefore x = \frac{a^2}{b^3} \dots ③$$

$$x = a^2 b^{-3} \dots \text{アイウ}$$

③と②より

$$\frac{a^2}{b^3} y^3 = b^3$$

$$y^3 = \frac{b^6}{a^2}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{b^6}{a^2}}$$

$$= a^{-\frac{2}{3}} \cdot b^2 \leftarrow \text{エ}$$

$$p = -\frac{2}{3} \dots \text{オカキ}$$

2015 ⅡB, 2 3/2

(2) $b = 2\sqrt[3]{a^4}$ とする。 a が $a > 0$ の範囲を動くとき、連立方程式 (*) を満たす正の実数 x, y について、 $x + y$ の最小値を求めよう。

$b = 2\sqrt[3]{a^4}$ であるから、(*) を満たす正の実数 x, y は、 a を用いて

$$x = 2 \boxed{\text{イウ}} a \boxed{\text{クケ}}, y = 2 \boxed{\text{エ}} a \boxed{\text{コ}}$$

と表される。したがって、相加平均と相乗平均の関係を利用すると、 $x + y$ は $a = 2^q$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ をとることがわかる。ただし

$$q = \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

$$b^3 = 8a^4 \text{ であるから}$$

[センター試験]

$$\textcircled{3} \text{より } x = \frac{a^2}{8a^4} = \frac{1}{8a^2} = 2^{-3} a^{-2}$$

$$y^3 = \frac{b^6}{a^2} \text{ より}$$

$$y^3 = \frac{64a^8}{a^2} = 64a^6$$

$$\therefore y = \sqrt[3]{64a^6} = 2^2 \cdot a^2$$

$$\therefore x + y = \frac{1}{8a^2} + 4a^2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{8a^2} \cdot 4a^2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{8a^2} = 4a^2$$

$$32a^4 = 1$$

$$a^4 = \frac{1}{32}$$

$$a = 2^{-\frac{5}{4}} \text{ である}$$