以下間違ってたらごめんなさい m(__)m。Short time DFT は, 瞬時スペクトラムの概念を導入することにより, 周波数分解能, 時間分解能をともに独立設定でき, 時間分解能を極限 (サンプリング時刻) まで高めることができる。時刻 n の瞬時ペクトラム $\Phi(n)$ は次のように与えられる。

$$\Phi(n)=\{\phi_0(n),\phi_1(n),\phi_2(n),\cdots\phi_{N-1}(n)\}$$

ここで $\phi_k(n)$ は瞬時スペクトラム $\Phi(n)$ を構成するインデックス k の成分であり, Short time DFT によって次のように定義される。

$$\phi_k(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(r)h(n-r)W_N^{-rk}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

但し, $x(r)$ は入力信号, $h(*)$ は Window 関数, $W_N^{-rk}=exp(-j2\pi rk/N)$ で与えられる回転演算子である。
次に, スペクトラム $\Phi(n)$ から N 個の出力信号を合成する Short time IDFT を次のように定義する。

$$y(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\phi_k(n)W_N^{nk}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$

但し, $y(n)$ はスペクトラム $\Phi(n)$ から合成される時刻 n の出力信号, $W_N^{nk}=exp(j2\pi nk/N)$ で与えられる回転演算子である。
ここで, スペクトラム $\Phi(n)$ から合成される出力信号 $y(n)$ が, 瞬時スペクトラムのサンプリング時刻 n の入力信号 $x(n)$ と一致することを証明する。
①を②に代入すると

$$\begin{aligned}y(n)&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left\{\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(r)h(n-r)W_N^{-rk}\right\}W_N^{nk}\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(n-r)k}\left\{\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(r)h(n-r)\right\}\end{aligned}$$

実際処理を行うときは上の r は有限長であるので, r,k の積和の順序は入れ替え可能である。ここで

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(n-r)k}=\begin{cases}1 & (n-r=qN:q\text{ は任意の整数})\\0 & else\end{cases}$$

従って, 出力 $y(n)$ は $n-r=qN$ のときのみ値をもち, このとき $y(n)$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}y(n)&=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n-qN)h(qN)\\&=x(n-qN)h(qN)\end{aligned}$$

ここで, Window 関数 $h(*)$ に次の制約を設ける

$$h(p)=\begin{cases}1 & p=0\\0 & p=uN:u\text{ は }0\text{ でない整数}\end{cases}$$

このとき, 出力信号 $y(n)$ が, 時刻 n の入力信号 $x(n)$ と一致することがわかる。このように, 時刻 n の瞬時スペクトラムから Short time IDFT を用いて合成される出力信号が, サンプリング時刻 n のみであることが知れる。これは DFT とは異なる点である。
しかし, Short time DFT の完全系を満たす Window 関数は, 時刻 n において 1 であり, Window の中心 (n) から時間 uN(u は 0 でない整数) において 0 を有すれば十分である (uN〜$(u+1)N$ は未定義)。従って完全系を示すための Window 関数は, 多数存在する。
線型シフト不変のシステムの概念を加味すれば, Short time DFT は入力信号 $x(n)W_N^{-nk}$ とインパルス $h(n)$ との畳み込み演算で与えられる。従って, Short time DFT によって得られる瞬時スペクトラムは, インパルス応答 $H(k)$ によって完全に記述される。つまり, Short time DFT は AM 変調波と Window 関数の線型フィルタリングで与えられる。このことからも Window 関数の周波数応答の特性いかんでは, 周波数解析, 周波数振幅解析, 位相解析に大きな影響を与えかねない。Short time DFT の Window 関数は大変重要であり, 上の Window 関数を満たす条件は完全系を示すだけのものでしかない。
以下に Short time DFT の Window 関数の 1 つである, ナイキスト関数を書いてみた。

$$h(p) = \frac{\sin(\pi p/N)}{\pi p/N}$$