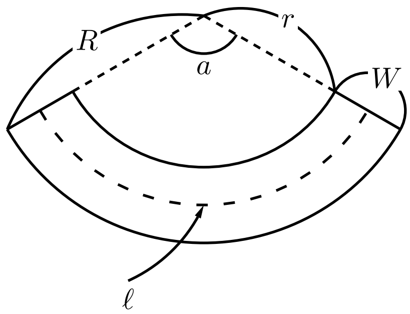
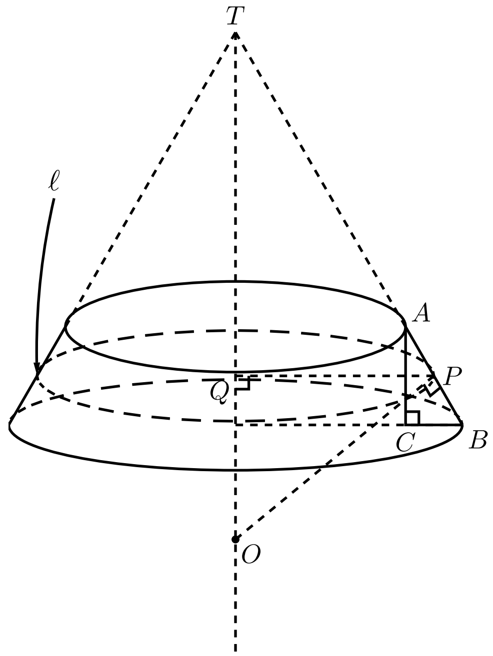
中学生でも納得かな？
なぜ球の表面積は $4\pi r^2$ なのかを証明しよう。
先ず半径 R、中心角 a °の扇形から、半径 r、中心角 a °の扇形を引いた面積 S_0は次の式で表される。



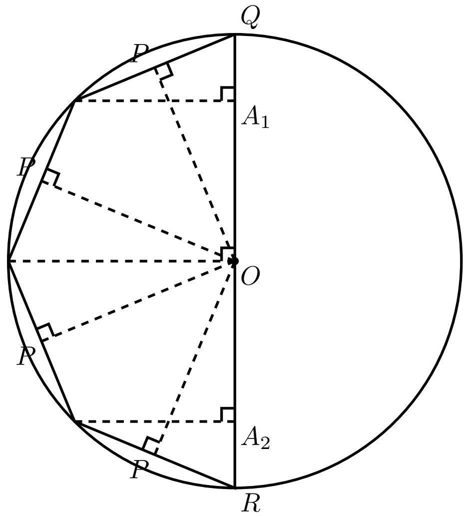
$S_0 = W\ell$
ただし ℓは幅 W の部分の中央線である。
証明

$$S_0 = \pi R^2 \times \frac{a}{360} - \pi r^2 \times \frac{a}{360}$$
$$= (\pi R^2 - \pi r^2) \times \frac{a}{360}$$
$$= \pi(R+r)(R-r) \times \frac{a}{360}$$
$$= \pi(R+r) \times \frac{a}{360} \times W \cdots ①$$
$$\ell = 2\pi \times (r + \frac{R-r}{2}) \times \frac{a}{360}$$
$$= \pi(R+r) \times \frac{a}{360} \cdots ②$$

①,②より、
$S_0 = W\ell \cdots$ (証明終わり)
このような考え方を使って、直円錐の側面積の一部分を考える。先の扇形と同じように半径 TB の扇形から、半径 TA の扇形を引いた面積 S_1は次の式で与えられる。
$S_1 = \ell\cdot AB \cdots ③$
ただし、ℓは幅 AB の部分の中央線である。
P は AB の中点で ℓ上にあり、P から直円錐の高さに下ろした垂線と高さの交点を Q とし、P を通り AB に垂直な線と高さの延長線との交点を O とすると、$\ell = 2\pi\cdot PQ$ であるから、③式は
$S_1 = 2\pi\cdot PQ \cdot AB \cdots ④$
また△ACB ∽ △PQO であるから、
$OP : PQ = AB : AC$
これより、
$PQ \cdot AB = OP \cdot AC \cdots ⑤$
④は⑤より、
$S_1 = 2\pi\cdot OP \cdot AC \cdots ⑥$



球を直径 QR の半円を１回転させてできる立体と考える。その半円を右の図のように４等分して頂点を結ぶと、ちょうど正八角形の半分ができる。これを QR を軸として回転させてできる立体の表面積 S_2を考えるとき、先の⑥の式を使って、次のように与えられる。



$S_2 = 2\pi OP \cdot QA_1 + 2\pi OP \cdot A_1O + 2\pi OP \cdot OA_2 + 2\pi OP \cdot A_2R$

$= 2\pi OP \times (QA_1 + A_1O + OA_2 + A_2R)$

$= 2\pi OP \cdot QR \cdots$ ⑦

上の⑦式は、４等分での結果の式であるが、これを n 等分にしても同じ結果が得られるのは気づいていただけたでしょうか。従って n 等分した時の面積 S_nは同様に

$S_n = 2\pi OP \cdot QR \cdots$ ⑧

この n を無限に近づけていくと、OP は QR の半分すなわち半径に等しくなる。この半円の半径を r とすると、

$OP = r$、$QR = 2r$ となり、

これを⑧に代入すると、

$S_n = 2\pi r \cdot 2r$

$= 4\pi r^2$

となる。従って半径 r の球の表面積 S は

$S = 4\pi r^2 \cdots$(証明終わり)