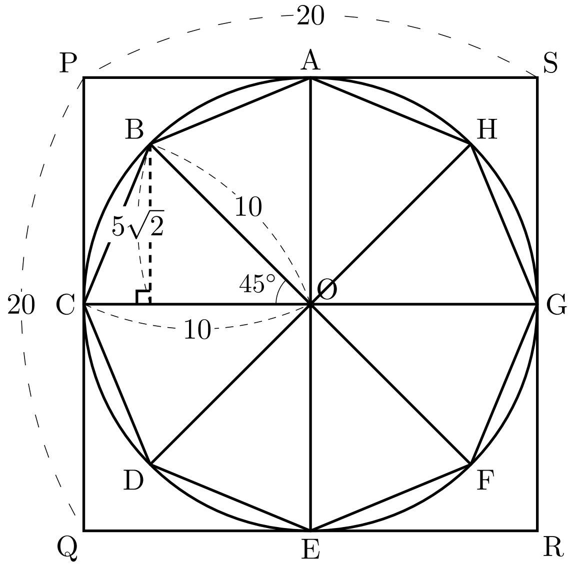
円の面積は (半径)× (半径)× (円周率) で与えられる (証明略)。

一辺が 20 の正方形に内接する円を考える。その円に内接する正多角形を考え, 右の図は正八角形の場合である。正八角形を円の中心 O を中心に合同な三角形に八等分してみる。このときできる三角形は頂角 45°, 頂角をはさむ 2 辺は 10 の二等辺三角形になる。



ここで △OBC について面積を求める。点 B から辺 OC に下ろした垂線の長さは $5\sqrt{2}$(三平方の定理, $1:1:\sqrt{2}$) であるから, △OBC の面積 S_1 は,

$$S_1 = 10 \times 5\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 25\sqrt{2}$$

正八角形の面積は S_1 の 8 個分なので, この正八角形の面積 S_e は,

$$S_e = 25\sqrt{2} \times 8 = 200\sqrt{2}$$

$\sqrt{2}$　1.414 とすると, 正八角形の面積は $S_e =$ 約 282.8 である。
またこのとき正方形の面積を S_S, 円の面積を S_O とし, 面積の関係を示すと,

$$S_e < S_O < S_S$$

正方形の面積は 400, 円の面積を, 10×10×π とすると,

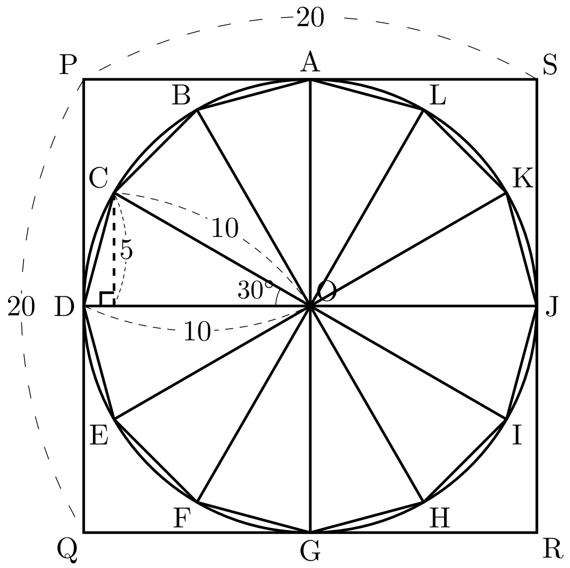
$$282.8 < 10 \times 10 \times \pi < 400$$

両辺 100 で割ると,

$$2.828 < \pi < 4$$

となり円周率はこの範囲にあることがわかる。

右の図は正十二角形の場合である。正十二角形を円の中心 O を中心に合同な三角形に十二等分してみる。このときできる三角形は頂角 30°, 頂角をはさむ 2 辺は 10 の二等辺三角形になる。ここで $\triangle$OCD について面積を求める。点 C から辺 OD に下ろした垂線の長さは 5(三平方の定理, $1:2:\sqrt{3}$) であるから, $\triangle$OCD の面積 S_2 は,



$$S_2 = 10 \times 5 \times \frac{1}{2} = 25$$

正十二角形の面積は S_2 の 12 個分なので, この正十二角形の面積 S_t は,

$$S_t = 25 \times 12 = 300$$

同様に, 正方形の面積と円の面積の関係を示すと,

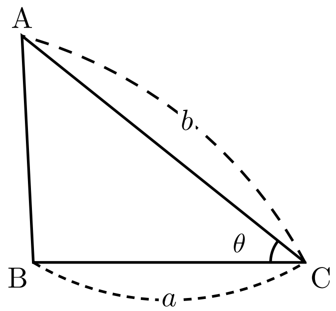
$$300 < 10 \times 10 \times \pi < 400$$

両辺 100 で割ると,

$$3 < \pi < 4$$

となり円周率はこの範囲にあることがわかる。

最後に高校生になったら習う技を使って, 正 360 角形の面積を電卓を使って求めてみます。長さや設定は先ほどと同じです。右の図のような, 三角形の面積 S は,



$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\theta$$

で与えられる。これが高校生で習う技である。ちなみにこれは底辺 $\times$ 高さ $\div 2$ の基本公式の形を変えただけであるが, 本題から外れるのでここでは紹介だけにしておく。求める三角形の面積は, 頂角 (ここでは θ)1°, $a = b = 10$ の三角形であるから, その面積 S_{small} は,

$$S_{small} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times sin1^\circ = 0.87262\cdots$$

となる。
これが 360 個集まったのが, 正 360 角形なので, この面積 S_{360} は,

$$S_{360} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times sin1^\circ \times 360 = 314.143315\cdots$$

となり、先と同様に比較すると,

約 $3.1414 < \pi < 4$

となる。
正 n 角形での証明は高校生になったらチャレンジしてください。

周の長さで考えると, 正六角形のとき円周率 3 になるのですかね？ この矛盾が僕には分かりません。まだまだ修行不足です。