

変化の割合

(1) 変化の割合と平均変化率

変化の割合も平均変化率も同じで2点間の傾きを表す。この割合がどこをとっても一定の場合グラフは直線を描く。

一次関数 $y = ax + b$ ($a \neq 0, b = \text{定数}$) とし、 x の変域を $p \leq x \leq q$ ($p \neq q$) とし、変化の割合が一定であることを示す。

$x = p$ のとき、 $y = ap + b \dots P(p, ap + b)$

$x = q$ のとき、 $y = aq + b \dots Q(q, aq + b)$

この2点 P, Q の傾きは、 $\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$ を使って、次のようになる。

$$\frac{(aq + b) - (ap + b)}{q - p} = \frac{a(q - p)}{(q - p)} = a \dots \textcircled{1}$$

①は x の変域 q, p に関係なく一定でその値は a になる。従って一次関数 $y = ax + b$ は直線になる。

(2) 二次関数

二次関数の変化の割合を次の調べてみる。

二次関数を $y = ax^2$ ($a \neq 0$) とし、先と同様、 x の変域を $p \leq x \leq q$ ($p \neq q$) とする。

$x = p$ のとき、 $y = ap^2 \dots P(p, ap^2)$

$x = q$ のとき、 $y = aq^2 \dots Q(q, aq^2)$

この2点間の傾きは、先と同様にすると

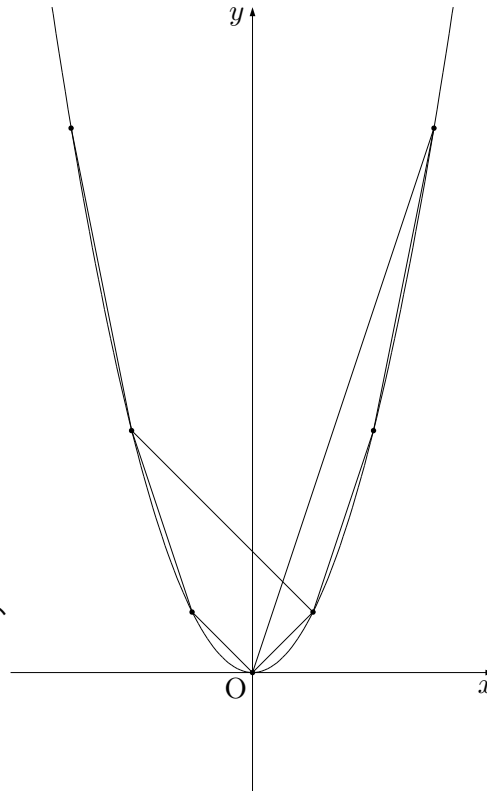
$$\begin{aligned} \frac{aq^2 - ap^2}{q - p} &= \frac{a(q^2 - p^2)}{q - p} \\ &= \frac{a(q + p)(q - p)}{q - p} = a(q + p) \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

②は x の変域の値 p, q によって変わる値で、常に一定ではない。常に一定でないということは、グラフは曲線を描く、これが放物線になるのである。

図1に関数 $y = x^2$ で、 x が $-3 \leq x \leq 3$ の整数を取って直線で結んでみた。また $(1,1)$ 、 $(-2,4)$ の傾き、 $(0,0)$ 、 $(3,9)$ の傾きを線分で表してみた。

図1 $y = x^2$ を直線で書く

破線は本来の放物線



(3) 反比例最後に変化の割合を $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0, x > 0$) で調べてみる。

x の変域は同じく $p < x < q$ ($p \neq q$) とする。

$$x = p \text{ のとき、} y = \frac{a}{p} \dots P(p, \frac{a}{p})$$

$$x = q \text{ のとき、} y = \frac{a}{q} \dots Q(q, \frac{a}{q})$$

同様にして、

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{q} - \frac{a}{p}}{q - p} &= \frac{ap - aq}{q - p} \\ &= \frac{ap - aq}{pq(q - p)} = -\frac{a(q - p)}{pq(q - p)} = -\frac{a}{pq} \end{aligned}$$

これも二次関数同様、 x の変域の値 p, q によって変わる値で、常に一定でない。このことは反比例の式もまた曲線を描く。これが双曲線といわれるグラフである。図 2 に反比例 $y = \frac{12}{x}$ の正の部分をも x, y とともに自然数の座標をとってそれを直線で結んでみた。

また (1, 12)、(3, 4) の傾き、(2, 6)、(12, 1) の傾きを線分で表してみた。

図 2 $y = \frac{12}{x}$ を直線で書く

破線は本来の双曲線

