方程式

(1) 中1一次方程式
$x+3=8$ という方程式
この場合、左辺の $x+3$ と右辺の8が釣り合う(等しい)x の値を求める。
$x=5$

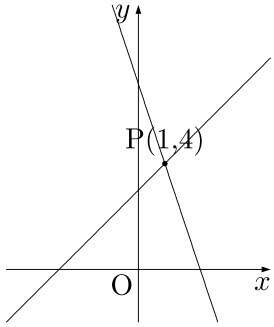


図1通常の方程式

(2) 中2連立方程式
文字を1つ消去して次元を下げる。その方法に
(*) 加減法,(**) 代入法がある。
ここでは、グラフ的見方で捉えてみます。
$2x+y=7$…①二元一次方程式⇒(変形)⇒ $y=-2x+7$…②一次関数
結論から言うと二元一次方程式①と一次関数②は同じである。
①を変形すると②の一次関数の直線の式が得られる。その直線上の点、すなわち直線の座標 (x,y) はすべて②を満たす。すなわち②の座標 (x,y) は① を満たす。よって①の解の集合も直線を表す。
連立方程式とは、異なる2直線の交点を求める作業なのである。
図1は以下の普通の連立方程式を表す。

$$\begin{cases} 3x+y=7 \\ x-y=-3 \end{cases}$$

連立方程式の定数項(一次関数でいう切片)が違うだけの場合を不能(図2)という。

不能(解なし)$\begin{cases} x-y=-7 \\ x-y=-3 \end{cases}$

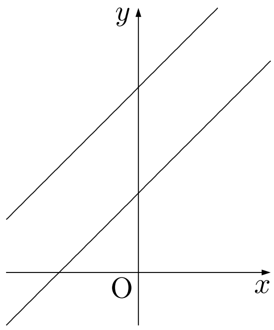


図2不能(解なし)

連立方程式の2式が同値の場合は不定(図3)という。

不定(解無数)$\begin{cases} 3x+y=2 \\ 6x+2y=4 \end{cases}$

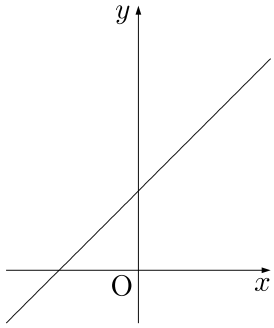


図3不定

ただ、不定でも $y=2x$ など $x:y=1:2$ とおける場合は、その解を $x=k, y=2k$ として扱う場合がある。ただ中学生ではその扱いはしない?と思うのでここでは紹介だけにとどめておく。

(3) 中 3 二次方程式

解法

(*) 因数分解,(**) 平方完成,(***) 解の公式

がある。二次方程式の一般式は次式で与えられる。

$ax^2+bx+c=0\cdots$③

$\because a \fallingdotseq 0$

ここでこの解は、解の公式より次式で与えられる

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdots$④

方程式的見方

まず左辺を平方完成させて変形していくと

$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=0$

$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

両辺 a で割って、

$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$

$x+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

これで④が得られました。

中学生では、二次方程式 $x^2-6x+5=0$ を因数分解したとき $(x-1)(x-5)=0$ となり、これを満たす条件として、$(x-1)=0$ または $(x-5)=0$ になる x を求めている。少し極端な言い方ですが、有理数の範囲で因数分解できないとき、解の公式を使えば答えが出てくる。ただし、中学生は高校生の範囲の因数分解はできないので、解の公式が役に立つ場合が多いと考える。ただし $x^2-5=0$ などは移項する方が簡単なのは言うまでもない。また、$\sqrt{b^2-4ac}$ の根号中の b^2-4ac は負となることは中学の間ではない。このことは後述するグラフ的見方において重要な役割を果たす。

補足 (グラフ的解釈)
詳しくは高校生で学習してください。
③の 2 つの解を α, β (α < β) とすると、この α, β は何を表しているのでしょうか。もちろん二次方程式で、α または β を式に代入すれば 0 になります。ここでは中学生の範囲を超えてグラフの交点として考えてみます。
③を左辺と右辺で式に分けてみます。それぞれ $y =$ とおくと、

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \cdots ⑤ \\ y = 0 \cdots ⑥ \end{cases}$$

ここで⑤は二次関数、⑥はグラフ軸の x 軸を表します。
⑤を平方完成すると

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

となり、グラフに表すと図 4 のようになる。ここでは $(a > 0)$ としてグラフを表す。
この⑤(二次関数) と⑥(x 軸) との交点が、解の公式④で与えられるものそのものである。
また、解の公式の根号中の $b^2 - 4ac$ が次のようになると、解の個数が分かる。

図 4:$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

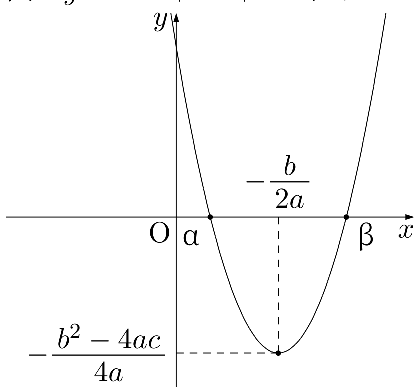
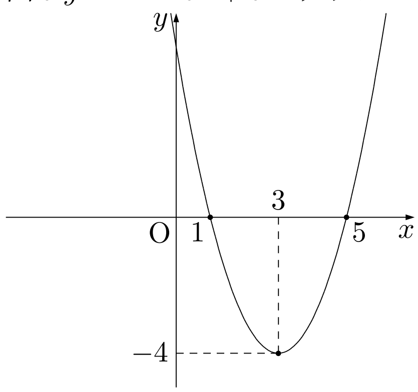


図 5:$y = x^2 - 6x + 5$ のグラフ



$b^2 - 4ac > 0 \cdots$解 2 個 (x 軸との交点が 2 個存在)
$b^2 - 4ac = 0 \cdots$解 1 個 (x 軸と接する)
$b^2 - 4ac < 0 \cdots$解 0 個 (x 軸とは交わらない。実数解は存在しない)
またグラフの頂点を見ても分かるように、$b^2 - 4ac > 0$ なら $a > 0$ とも併せて、頂点の y 座標は $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$ となり、頂点は x 軸 より下になる。$a < 0$ の場合は x 軸 より上になる。
この $b^2 - 4ac$ は判別式と言ってかなり活躍するので、高校生になったらぜひ活用していただきたい。
図 5 に $y = x^2 - 6x + 5$ のグラフを書いてみました。$y = 0$ とおくと $x = 1, 5$ となる。グラフ的な見方を利用すると、中 1 の方程式 $x + 3 = 2x - 5$ を考えると、実は 2 直線 $y = x + 3, y = 2x - 5$ の交点の x 座標だったりするのですね。面白いものです。