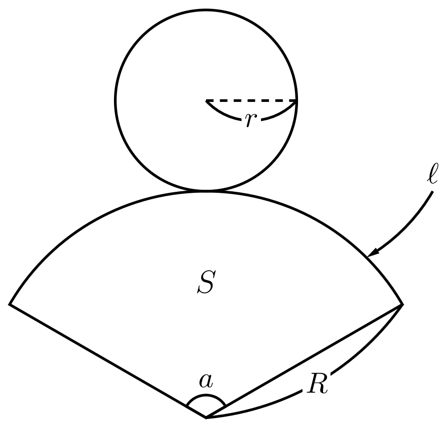
円錐の公式の導き方

円錐の展開図において, 側面のおうぎ形の半径 (円錐の母線) を R, 側面のおうぎ形の弧の長さ (底面の円の周の長さ) を ℓ, おうぎ形の中心角を a, 円錐の側面積 (おうぎ形の面積) を S, 底面の円の半径を r とする。



側面の扇形の弧の長さ ℓ

$$\ell = 2\pi R \times \frac{a}{360} \cdots ①$$

側面の扇形の面積

$$S = \pi R^2 \times \frac{a}{360} \cdots ②$$

②の式の両辺を 2 倍すると,

$$2S = 2\pi R^2 \times \frac{a}{360}$$

R^2 を $R \times R$ に分解して変形すると,

$$2S = \underline{\underline{2\pi R \times \frac{a}{360}}} \times R$$

下線部は①と同じ式であるから,

$$2S = \ell \times R$$

これより,

$$S = \frac{1}{2}\ell R \cdots ③$$

また ℓ は円錐の底面の円周と等しいので,

$$\ell = 2\pi r \cdots ④$$

③,④より,

$$S = \frac{1}{2}R \times 2\pi r = \pi r R \cdots ⑤$$

①を変形すると,

$$\frac{a}{360} = \frac{\ell}{2\pi R}$$

$\ell = 2\pi r$ より,

$$\frac{a}{360} = \frac{r}{R}$$

よって,

$$a = \frac{r}{R} \times 360 \cdots ⑥$$

以上をまとめると,

円錐の側面積 S の公式

$$S = \pi r R$$

円錐の表面積 S_1 の公式

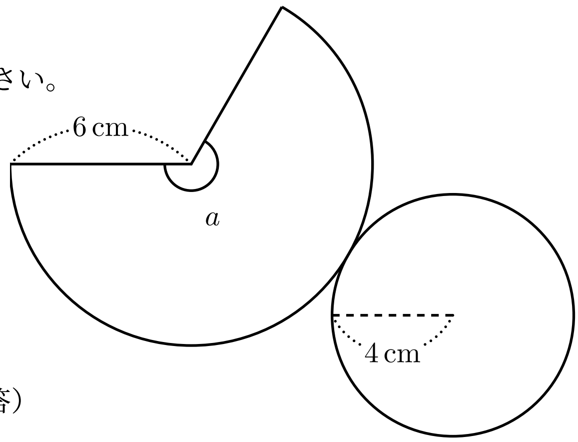
$$S_1 = S + \pi r^2 = \pi r R + \pi r^2$$

側面のおうぎ形の中心角

$$a = \frac{\text{底面の半径}}{\text{母線}} \times 360^\circ = \frac{r}{R} \times 360^\circ$$

S に関しては $S = \dfrac{1}{2}\ell r$ があるが, 登場は $S = \pi r R$ の方が多いと思われるので割愛している。
では例題をやってみよう。

右下の図のような円すいの展開図がある。側面の展開図は, 半径が 6 cm, 中心角が a のおうぎ形で, 底面の円の半径は 4 cm である。このとき, (1), (2) の問いに答えなさい。ただし, 円周率は π とする。



(1) 側面のおうぎ形の中心角 a の大きさを求めなさい。

(2) 円すいの表面積を求めなさい。

(1) であるが,

$$a = \frac{r}{R} \times 360^\circ$$

を用いて,

$$a = \frac{4}{6} \times 360^\circ = \frac{2}{3} \times 360^\circ = 240^\circ \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) は, 側面積 S を公式

$$S = \pi r R$$

を用いて,

$$S = \pi \times 4 \times 6 = 24\pi \cdots (\text{側面積})$$

この S に底面積 $\pi r^2 = 16\pi$ を加えて, 表面積 S_1 は,

$$S_1 = 24\pi + 16\pi = 40\pi$$

$40\pi\,\mathrm{cm}^2$　……(答) となる。