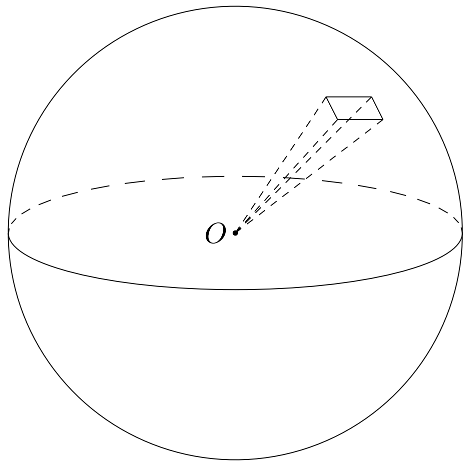
球の体積の公式のなぜ？



球の中心を O とし、頂点を O とする正四角錐で球を n 等分していくことを考える。
このとき、n を無限に近づけていくと、四角錐の高さは球の半径 r に限りなく等しくなる。また、球の表面積は n 等分される。このとき n 等分された面積を $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n$ とすると、S_1 を底面とする 正四角錐の１つ分の体積は $\frac{1}{3} \times S_1 \times r = \frac{1}{3}S_1 r$…①で求められる。これを S_1〜S_n まで求め、全て足したものが球の体積と等しいので、球の体積 V は次のようになる。

$$V = \frac{1}{3}S_1 r + \frac{1}{3}S_2 r + \frac{1}{3}S_3 r + \cdots + \frac{1}{3}S_n r$$
$$= \frac{1}{3}r(S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n) \cdots ②$$

となる。
ここで②のカッコの中は球の表面積 $4\pi r^2$ と等しいので、次のように書くことができる。

$$V = \frac{1}{3}r(S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n) = \frac{1}{3}r \times 4\pi r^2$$

整理して

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

①からの別解
n 等分した正四角錐１つ分の体積 V_1 は①より、

$$V_1 = \frac{1}{3}S_1 r$$

これが n 個集まると球の体積 V なので、

$$V = n \times V_1$$
$$= n \times \frac{1}{3}S_1 r \cdots ③$$

ここで $S_1 = \frac{4\pi r^2}{n}$ であるから、これを③に代入すると、

$$V = n \times \frac{1}{3} \times \frac{4\pi r^2}{n} \times r$$
$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

よって、
球の体積 V は

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$