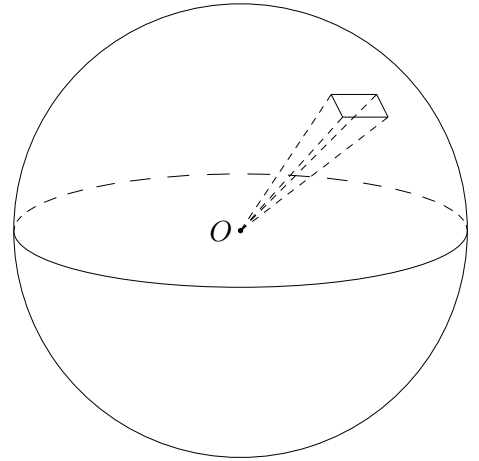


球の体積の公式のなぜ？

球の中心を  $O$  とし、頂点を  $O$  とする正四角錐で球を  $n$  等分していくことを考える。

このとき、 $n$  を無限に近づけていくと、四角錐の高さは球の半径  $r$  に限りなく等しくなる。また、球の表面積は  $n$  等分される。このとき  $n$  等分された面積を  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  とすると、 $S_1$  を底面とする正四角錐の1つ分の体積は  $\frac{1}{3} \times S_1 \times r = \frac{1}{3} S_1 r \dots \textcircled{1}$  で求められる。これを  $S_1 \sim S_n$  まで求め、全て足したものが球の体積と等しいので、球の体積  $V$  は次のようになる。



$$V = \frac{1}{3} S_1 r + \frac{1}{3} S_2 r + \frac{1}{3} S_3 r + \dots + \frac{1}{3} S_n r \\ = \frac{1}{3} r (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n) \dots \textcircled{2}$$

となる。

ここで②のカッコの中は球の表面積  $4\pi r^2$  と等しいので、次のように書くことができる。

$$V = \frac{1}{3} r (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n) = \frac{1}{3} r \times 4\pi r^2$$

整理して

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

①からの別解

$n$  等分した正四角錐 1 つ分の体積  $V_1$  は①より、

$$V_1 = \frac{1}{3} S_1 r$$

これが  $n$  個集まると球の体積  $V$  なので、

$$V = n \times V_1 \\ = n \times \frac{1}{3} S_1 r \dots \textcircled{3}$$

ここで  $S_1 = \frac{4\pi r^2}{n}$  であるから、これを③に代入すると、

$$V = n \times \frac{1}{3} \times \frac{4\pi r^2}{n} \times r \\ = \frac{4}{3} \pi r^3$$

よって、

球の体積  $V$  は

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$