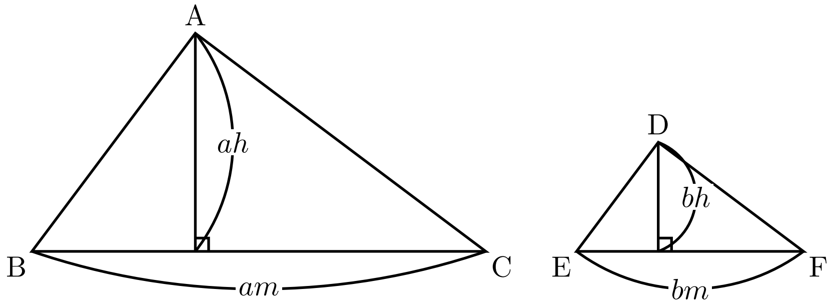
下の図のような △ABC と △DEF があります。相似比は $a:b$ である。このとき, 面積比が $a^2:b^2$ となることを証明してみましょう。




以下三角形限定で証明させていただきます。$a,b$ を自然数, $m,h$ を正の数とし相似比が $a:b$ の三角形の底辺である辺 BC, EF をそれぞれ $am$ , $bm$, 頂点 A, D から底辺におろした高さを $ah$, $bh$ とおく。(注：相似比が $a:b$ ということは高さの関係も相似なのでその比は $a:b$ とおける) ここで △ABC, △DEF の面積をそれぞれ $S_1, S_2$ とおくと,

$$S_1 = \frac{1}{2} \times am \times ah$$
$$= \frac{a^2mh}{2}$$
$$S_2 = \frac{1}{2} \times bm \times bh$$
$$= \frac{b^2mh}{2}$$

よって面積比 $S_1:S_2$ は

$\dfrac{a^2mh}{2} : \dfrac{b^2mh}{2} = a^2 : b^2$ 従って, 相似比が $a:b$ の三角形の面積比は $a^2:b^2$ である。三角形なら, 直角二等辺三角形が証明としてはやりやすい。また正方形や円を証明に用いれば, もっとすっきりする。他の多角形の場合はおそらく, 三角形の組み合わせで証明できるんじゃないの？ということで今回三角形に特化して証明しました。