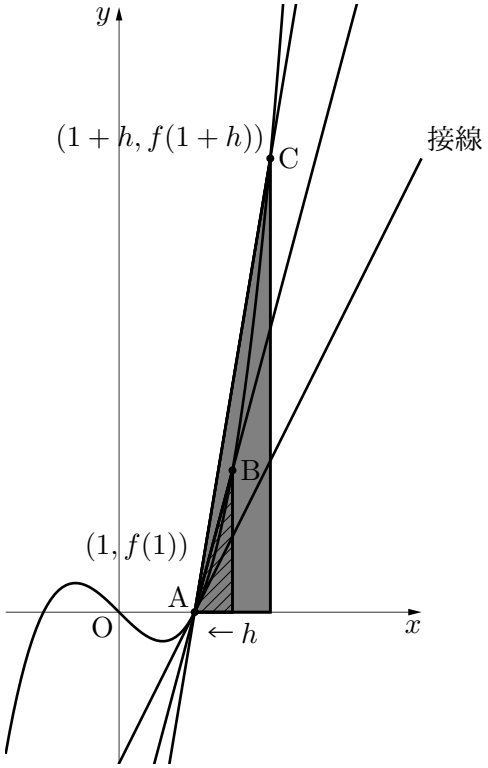
接線の傾きって微分で求まるの?



右の図は関数 $f(x) = x^3 - x$ のグラフである。微分したものがなぜ接線の傾きになるのか考えてみましょう。ここでは、グラフ上の A(1,0) における接線の傾きを求めてみます。まず点 A を通る直線を考えるとき, 直線 AC,AB のように点 A とは異なる点を通る直線が考えられます。ここで点 A 以外のグラフ上の点を $C(1+h, f(1+h))$($\because$ h は点 A からの x の増加量) とすると, 2 点 AC を通る直線の傾きは中学生の公式を使って, 次のように与えられます。

$$\begin{aligned}
\text{傾き} &= \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} \\
&= \frac{f(1+h)-f(1)}{(h+1)-1} \\
&= \frac{\{(1+h)^3-(1+h)\}-\{1^3-1\}}{h} \\
&= \frac{1+3h+3h^2+h^3-1-h-0}{h} \\
&= 2+3h+h^2 \cdots ①
\end{aligned}$$

となります。

ここで, 接線とは接することであるから, この点 A からの増加量 h は 0 に近くなり, 点 A ではまさに 0(厳密には 0 ではないが, 限りなく 0 である) になって, 接することになります。ですから①で $h \to 0$ となり, 接線の傾きは 2 になることが分かります。これが関数 $f(x)$ の $x = 1$ における微分係数 (接線の傾き) です。このように, グラフを細かく見ていくことができます。

一般に関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数は次のように定義されます。

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

微分係数は x の値 1 つ 1 つに対応しますが, この 1 つ 1 つの対応を関数としてみたとき, 導関数 (微分) は次のように定義されます。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdots ②$$

実際, 上の $f(x) = x^3 - x$ の微分を②でやってみると,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\{(x+h)^3-(x+h)\}-(x^3-x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^3}+3x^2h+3xh^2+h^3-x-h-\cancel{x^3}+x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (3x^2-1+3xh+h^2) \\
&= 3x^2-1
\end{aligned}$$

微分をご存知の方は, $f(x) = x^3 - x$ なら, $f'(x) = 3x^2 - 1$ となることは瞬時にお分かりだ

と思います。したがって, $x=1$ における微分係数 (接線の傾き) は,$f'(1)=2$ となり, はじめに計算したものと一致する。このように, 微分し接点の x 座標を代入すると接線の傾きが得られるのです。微分することで, 瞬間の変化の割合 (傾き) が分かります。これによって, グラフを細かく見ていくことが可能です。また, 変化の割合が一定でないことは, そのグラフは曲線を描くことは言うまでもありません。

微分係数では x の値に応じて 1 つ 1 つ求めなければなりませんが, 今後微分係数の計算は導関数を求めて (微分して), それに必要な x の値を代入することで, 所定の微分係数は得られるようになります。