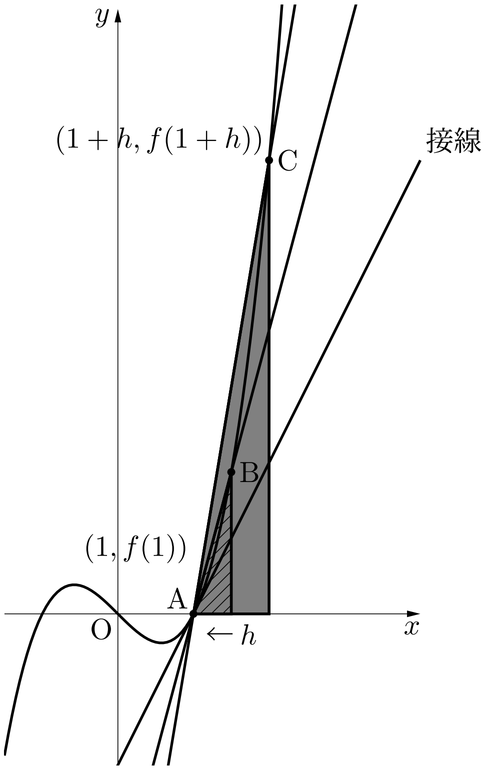
接線の傾きって微分で求まるの?



右の図は関数 $f(x)=x^3-x$ のグラフである。微分したものがなぜ接線の傾きになるのか考えてみましょう。ここでは、グラフ上の A(1,0) における接線を求めてみます。まず点 A を通る直線を考えるとき, 直線 AC,AB のように点 A とは異なる点を通る直線が考えられます。ここで点 A 以外のグラフ上の点を C$(1+h, f(1+h))$($\because h$ は点 A からの x の増加量) とすると, 2 点 AC を通る直線の傾きは中学生の公式を使って, 次のように与えられます。

$$
\begin{aligned}
\text{傾き} &= \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}\\
&= \frac{f(1+h)-f(1)}{(h+1)-1}\\
&= \frac{\{(1+h)^3-(1+h)\}-\{1^3-1\}}{h}\\
&= \frac{1+3h+3h^2+h^3-1-h-0}{h}\\
&= 2+3h+h^2 \cdots ①
\end{aligned}
$$

となります。

ここで, 接線とは接することであるから, この点 A からの増加量 h は 0 に近くなり, 点 A ではまさに 0(厳密には 0 ではないが, 限りなく 0 である) になって, 接することになります。ですから①で $h \to 0$ となり, 接線の傾きは 2 になることが分かります。このように, グラフを細かく見ていくことを微分するといい次のようにあらわされます。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdots ②$$

実際, 上の $f(x)=x^3-x$ の微分を②でやってみると,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^3-(x+h)\}-(x^3-x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^3}+3x^2h+3xh^2+h^3-\cancel{x}-h-\cancel{x^3}+\cancel{x}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(3x^2-1+3xh+h^2)\\
&= 3x^2-1
\end{aligned}
$$

微分をご存知の方は, $f(x)=x^3-x$ なら, $f'(x)=3x^2-1$ となることは瞬時にお分かりだと思います。従って, $x=1$ における微分係数 (接線の傾き) は,$f'(1)=2$ となり, はじめに計算したものと一致する。微分すると接線の傾きが得られるのでした。このように瞬間の変化の割合 (傾き) が分かることで, グラフを細かく見ていくことが可能です。また, 変化の割合が一定でないことは, そのグラフは曲線を描くことは言うまでもありません。