

なんで $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ なの？

右の図のように原点 O からの距離が 1 の点はどんな軌跡をえがくでしょうか。こういう問いがあったとき、まずは原点から距離が 1 離れた点 $P(x, y)$ として考えてみる。このとき、三平方の定理より明らかに $x^2 + y^2 = 1$ となり、これは原点 O を中心とした半径 1 の円と等しくなることが分かるでしょうか。原点 O を中心にくるくる回してみてください。コンパスと同じ動きをするのが分かると思います。この $P(x, y)$ の座標は、いま線分 OP と x 軸がなす角を θ とすると、

$$\cos \theta = \frac{x}{OP} = x, \sin \theta = \frac{y}{OP} = y$$

つまり、

$$x = \cos \theta, y = \sin \theta$$

であるから、これを $x^2 + y^2 = 1$ に代入して、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

を得る。

同様な理由で、半径 OP が a の場合でこれを一般化すると、 $a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta = a^2$

となり、結果、

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

が得られる。

