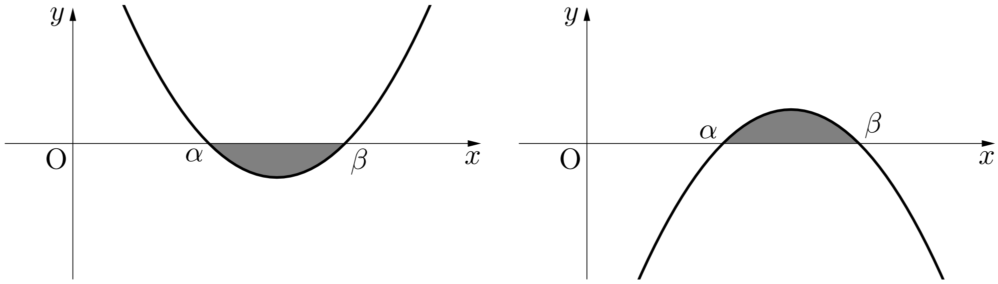
$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx &= a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)\,dx \\ &= a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2+(\alpha-\beta)(x-\alpha)\,dx \\ &= a\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta \\ &= a\left\{\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)^2\right\} \\ &= a\left\{\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\right\} \\ &= -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$



結果にマイナスが付いているが, 通常面積を求める場合, $a>0$ なら上の左の図のようになり,

$$\int_\alpha^\beta \{0-a(x-\alpha)(x-\beta)\}\,dx = \frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

となる。同様に $a<0$ の場合もである。

したがって, これらを一般化したのが公式である。

2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ と一次関数 $g(x)=mx+n$ によって囲まれる面積は, 2 つのグラフの交点を以下の方程式で求め

$ax^2+bx+c=mx+n$

$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ と変形でき,

$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$

とするとき,

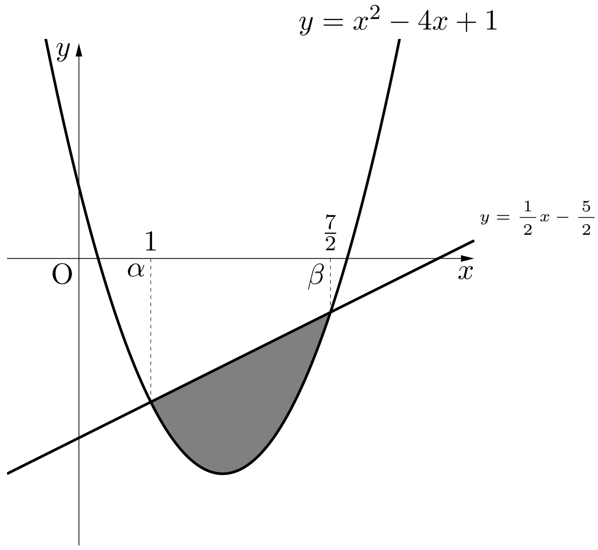
$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

である。

とくに, こういう問題で役に立つ。

例題

直線 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}$ と, 曲線 $y=x^2-4x+1$ で囲まれる面積を求めなさい。



解法

求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_1^{\frac{7}{2}} \left\{ \left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \right) - (x^2-4x+1) \right\} dx \\
&= -\int_1^{\frac{7}{2}} (x-1)\left(x-\frac{7}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{7}{2}-1\right)^3 \\
&= \frac{125}{48} \quad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

理屈は上だが, 答えだけなら, 単純に

$S=\dfrac{1}{6}(\dfrac{7}{2}-1)^3=\dfrac{125}{48}$

で求まる。