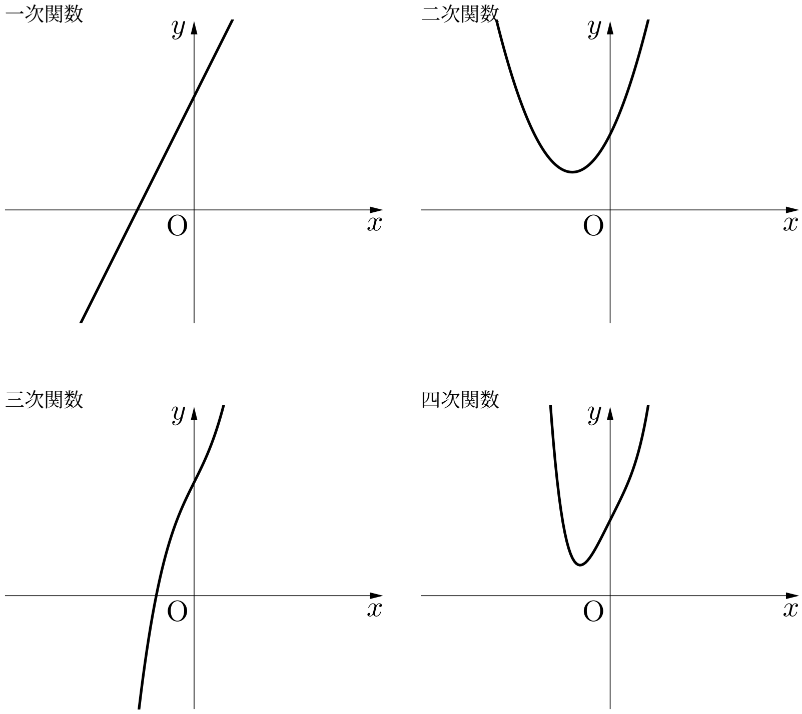
関数 $f(x)$ が最高次数が奇数の関数で係数が実数ならば, 少なくとも一つは実数解をもつ。このことは, 微積分でこの性質を使って解法するときがあります。実際どうなんでしょう。



このように, 最高次数が偶数では x 軸との交点が存在しない場合が出てきます。ここで, 確認ですが, 関数 $f(x)$ が x 軸との交点をもつということは, $f(x)=0$ となる x が存在するということです。ここでは, 最高次数が奇数なら $f(x)=0$ となる x が最低一つは存在するという確認です。
ここで,
$f(x)=ax^{2n-1}+bx^{2n-2}+cx^{2n-3}+\cdots+zx^0$ ($a>0,\ n$ は自然数)
と置くとき,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

である。またグラフは連続関数であるから, 中間値の定理より $f(x)=0$ となる x が少なくとも一つは存在することが分かる。
ちなみに, 最高次数が偶数なら,
$f(x)=ax^{2n}+bx^{2n-1}+cx^{2n-2}+\cdots+zx^0$ ($a>0,\ n$ は自然数)
と置くとき,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$$

となり, $f(x)<0$ となる x を確認できない。

以上より最高次数が奇数の関数で, 係数が実数ならば, 少なくとも一つの実数解をもつ。