

どうやって余弦定理ができるの？

余弦定理は中学3年生で習った三平方の定理の拡張版だと思ってください。三平方の定理は $\theta = 90^\circ$ のときだけでしたが、余弦定理では $\theta$ は $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ まで拡張できます。

次の余弦定理①を右の図を使って証明しましょう。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta \cdots \text{①}$$

$\triangle ABC$ で、 $\angle BAC = \theta$ とおき、点Cから辺ABにおろした垂線と辺ABの交点をDとする。このとき、右の図のように、 $AD = b \cos \theta$ 、 $CD = b \sin \theta$ とおき、 $BD = c - b \cos \theta$ となる。ここで、 $\triangle BCD$ で三平方の定理を用いると、

$$a^2 = (c - b \cos \theta)^2 + b^2 \sin^2 \theta$$

$$= c^2 - 2bc \cos \theta + b^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$$

$$= c^2 - 2bc \cos \theta + b^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta \cdots (\text{証明終})$$

今回は $\theta$ は鋭角で行いましたが、鈍角でも同じ結果が得られる。

