図 1 は, AB=4 cm の長方形 ABCD である。点 P は, A を出発して, 毎秒 1 cm の速さで, B を通って C まで進む。点 Q は, 点 P と同時に A を出発し, 毎秒 1 cm の速さで辺 AD 上を 1 往復する。図 2 は, 点 P が A を出発してから x 秒後の △PCD の面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ としたときの, x と y の関係をグラフに表したものである。次の問いに答えなさい。

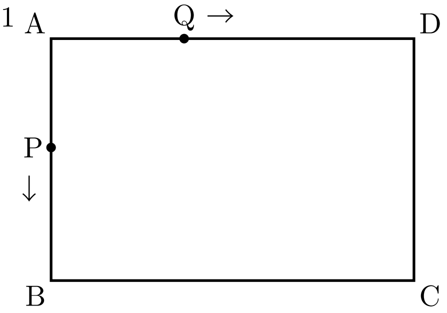
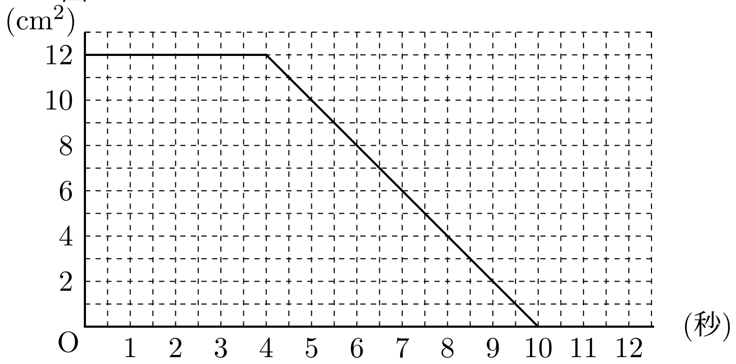
図 1


図 2


(1) 辺 BC の長さを求めなさい。

(2) 図 2 のグラフで, x の変域が $4 \leqq x \leqq 10$ のとき, y を x の式で表しなさい。

(3) 点 Q が A を出発してから x 秒後の △QCD の面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ としたとき, x と y の関係を表すグラフを, 上の図に書き加えなさい。

(4) △QCD の面積と △PCD の面積が等しくなるのは何秒後か求めなさい。ただし, $x = 0$ のときは除くものとする。

〔徳島県とくしま学力テスト中 3 第 1 回〕

(1) 辺 BC であるが, グラフから点 P が辺 AB 上にあるときは, 面積が一定で $12\,\mathrm{cm}^2$ であるから,

$$4 \times \mathrm{BC} \times \frac{1}{2} = 12$$

より, BC=6 (cm) ……(答)

(2) 求める直線の式は (4, 12), (10, 0) を通るから, 式を求めると,

$$y = -2x + 20 \quad \cdots\cdots(\text{答}) \cdots (\mathrm{A})$$

(3) グラフの動きを知るためには面積がどう変化していくかを知ることが大事

折り返すポイントで場合分けして考えるのが鉄則

図 3($0 \leqq x \leqq 6$) では, △QCD の面積 y は $y =$DC×QD×$\frac{1}{2}$ で求まるので,

$$y = 4 \times (6 - x) \times \frac{1}{2}$$

$$y = -2x + 12 \cdots (\mathrm{B})$$

となる。

次に図 4($6 \leqq x \leqq 12$) のように D を折り返してくる場合, △QCD を求める式はさっきと同じであるが, QD の長さが異なる。したがって,

$$y = 4 \times (x - 6) \times \frac{1}{2}$$

$$y = 2x - 12 \cdots (\mathrm{C})$$

(B),(C) のグラフをかいて出来上がり。

ただ, これは上級者の解き方で王道であるが, これと違った簡単な解き方を紹介する。少々荒業で, 危険な技である。この手の問題すべてに通用する技ではないので, きちんと理解しておかないとダメである。解法の 1 つとして捉えていただきたい。

図 3 では, 点 Q が D に向かっている様子を表していますが, このとき △QCD の面積は減少していっています。Q は 6 秒後に D に到着するので, そのとき面積は $0\,\mathrm{cm}^2$ になる。したがって, (6,0) の座標を通る。

次に図 4 のように D を折り返してきたときを考えると, △QCD の面積は増加していきます。D を折り返してから 6 秒後 (A を出発してから 12 秒後) に A に到着し, △QCD の面積は $12\,\mathrm{cm}^2$ になります。つまり, (12, 12) を通ります。点 Q が A を出発するときの △QCD の面積は $12\,\mathrm{cm}^2$ であるから, (0,12) から始まるとして, (0,12), (6, 0), (12, 12) を直線で結ぶとグラフは完成。

図 3

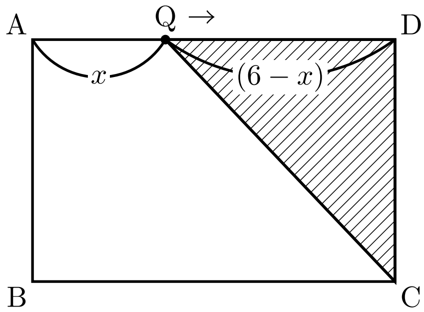
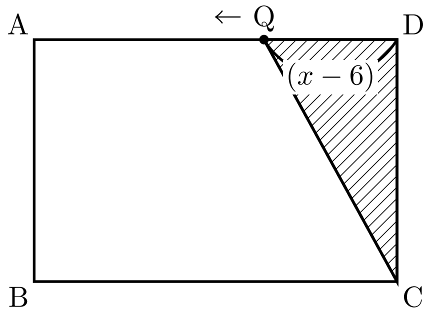


図 4



折り返しの様子

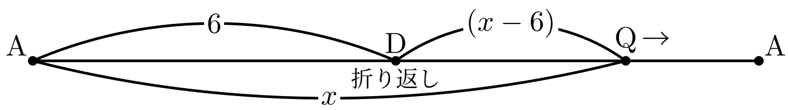
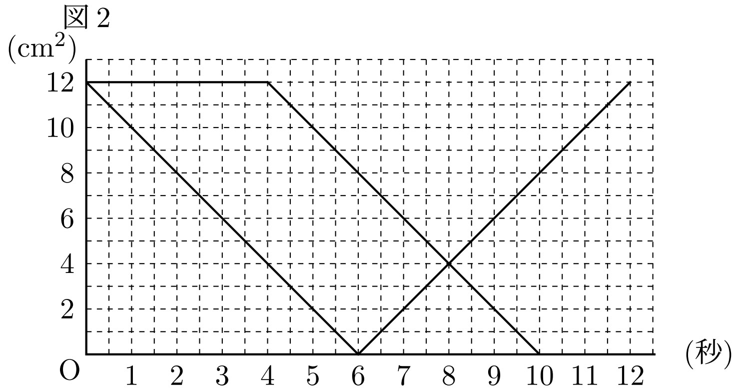


図 2



等しくなるのは, グラフが交わったポイントであるから, 2 直線の式, $y = -2x + 20 \cdots$ (A) と $y = 2x - 12 \cdots$ (C) の交点したがって,

$$-2x + 20 = 2x - 12$$

を解いて,

$$x = 8$$

8 秒後 ……(答)

となる。