

平方根

さていよいよ？数学らしくなってくる時が来ました。無理数というものをこれから学びます。無理数という言葉はいきなり出てきませんが、新しい数学の記号と概念をここでは学んでください。

2乗してある数 a になる数を考えていくことにします。

例えば、2乗して36になる数は、なんですか？

6と-6です。

そうですね。このとき、この2つの数 (± 6 プラスマイナス6と読む) を36の平方根といいます。

+6は36の正の平方根

-6は36の負の平方根

となります。

このように、一般に、ある数 a ($a > 0$) の平方根は、次の関係を満たす x になります。

$$x^2 = a$$

ですから、平方根は正と負の2つあることになります。

ただ、0の平方根は0しかありません。例えば、

64の平方根は8と-8 (± 8)

$\frac{9}{4}$ の平方根は $\pm \frac{3}{2}$

0.04の平方根は ± 0.2

となります。

2乗して負になる数は中学校では学びません。

では、上に書いたようにすんなり求まる数字はいいでしょう。

考えなくてはいけないのが平方根がきちんと求まらない数です。

どういった数かといいますと、例えば2

2乗して2になる数はいくつなんでしょうか。

$$\begin{array}{ccc} +6 & \xrightarrow{2 \text{ 乗}} & 36 \\ -6 & \xleftarrow{\text{平方根}} & \end{array}$$

$$1^2 = 1, 1.1^2 = 1.21, 1.2^2 = 1.44, 1.3^2 = 1.69, 1.4^2 = 1.96, 1.5^2 = 2.25$$

$1.4^2 = 1.96$, $1.5^2 = 2.25$ であるから (1.4の2乗では2をこえなくて、1.5の2乗で2をこえたので)、2の平方根は1.4と1.5の間にあります。次に

$$1.41^2 = 1.9881, 1.42^2 = 2.0164$$

このことから、2乗して2になる数は1.41と1.42の間にあります。

$$1.411^2 = 1.990921, 1.412^2 = 1.993744, 1.413^2 = 1.996569, 1.414^2 = 1.999396, 1.415^2 = 2.002225$$

このことから、2乗して2になる数は1.414と1.415の間にあることが分かります。以下ずっと計算していけば、2乗して2になる数を突き詰めていくことができます。

ただ、それは永遠に行っていかななくてはならない作業になります。

このように、ある数の平方根が求まらないときは記号 $\sqrt{\quad}$ (記号の名は根号) を使って平方根を表すことが可能です。

したがって、2の平方根は $\pm\sqrt{2}$ (\pm ルート2と読む) となります。

一般に、ある数 a ($a > 0$) の平方根は $\pm\sqrt{a}$ となります。

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{a} & \xrightarrow{2 \text{ 乗}} & a \\ -\sqrt{a} & \xleftarrow{\text{平方根}} & \end{array}$$

平方根 $\pm\sqrt{a}$ は二乗するとある数 a になりますが、 $\sqrt{\quad}$ の中がある数の 2 乗になるときは $\sqrt{\quad}$ がはずれます。

例えば、25 の平方根は $\pm\sqrt{25}$ ですが、 $25 = 5^2$ であるから、 $\pm\sqrt{25} = \pm\sqrt{5^2}$ となって、2 乗すると 25 になる数がきちんと存在します。その場合は、 $\pm\sqrt{25}$ とは書かず、 $\pm\sqrt{25} = \pm 5$ となります。ですから何でもかんでも $\sqrt{\quad}$ を付ければいいというものではありません。

ここで簡単な?問題 (解答はこのプリントの最後に掲載) Q1~Q5 の文を読んで、下線部の誤りがあるものは訂正しなさい。

Q1 . $(-\sqrt{7})^2$ は 7 である。

Q2 . 10 の平方根は $\sqrt{10}$ である。

Q3 . -36 の平方根は ± 6 である。

Q4 . $\sqrt{(-5)^2} = -5$ である。

Q5 . $\frac{4}{9}$ の平方根は $\pm\sqrt{\frac{4}{9}}$ である。

平方根の大小

平方根もれっきとした数ですから大小関係が存在します。

a, b を正の数とし、 $a > b$ であるとするなら、

$$\sqrt{a} > \sqrt{b}$$

という関係が成り立ちます。

例 $\sqrt{7}$ と $\sqrt{10}$ の大小関係を不等号を用いて表せ。7 < 10 より、

$$\sqrt{7} < \sqrt{10}$$

例 $-\sqrt{5}$ と $\sqrt{3}$ の大小関係を不等号を用いて表せ。 $-5 < 3$ より、

$$-\sqrt{5} < \sqrt{3}$$

例 $-\sqrt{6}$ と $-\sqrt{2}$ の大小関係を不等号を用いて表せ。 $-6 < -2$ より、

$$-\sqrt{6} < -\sqrt{2}$$

このように正の数、負の数と同様に大小関係が示すことができます。

以下余力のある人。中学生レベルではほとんど知らない知識ですので、

余談ですが平方根の平方とは 2 乗と同じ意味です。面積の単位で cm^2 平方センチメートルって言いますよね。2 乗があるのなら 3 乗、4 乗、... ってありますから、平方根の次に 3 乗根 (立方根)、3 乗根の次に 4 乗根、... ってありそうですね。8 の 3 乗根は 2 です。2 を 3 乗すれば 8 になりますよね? -27 の 3 乗根は -3 、2 の 3 乗根はきちんと求まらないので、 $\sqrt[3]{2}$ と書きます。

Q1 . $(-\sqrt{7})^2$ は 7 である。
正しい。

Q2 . 10 の平方根は $\sqrt{10}$ である。
 $\pm\sqrt{10}$

Q3 . -36 の平方根は ± 6 である。
36

Q4 . $\sqrt{(-5)^2} = \underline{-5}$ である。
5

Q5 . $\frac{4}{9}$ の平方根は $\pm\sqrt{\frac{4}{9}}$ である。
 $\pm\frac{2}{3}$