因数分解

因数分解は展開の逆の作業のことをいいます。

因数分解って, 厳密には中 3 で習うんですが, 中 2 で実はすこしかじっているんです。

偶数 + 偶数は偶数っていう文字式の説明ってやったでしょ？覚えていますか？

$$2m+2n=2(m+n)$$

この作業を因数分解って言うんですね。左辺の $2m+2n$ の各項に共通する 2 という因数をとりだして, 右辺の $2(m+n)$ に変形していますね。このように, 共通する文字や数字を最大限とりだすことを因数分解といいます。この共通する因数のことをそのまま共通因数といいます。

因数分解では, この共通因数を取り出すことが基本となります。

$$5xy^2+10x^2y=5xy(y+2x)$$

ここで, $5xy$ は $5xy^2$ と $10x^2y$ に共通する因数 (約数) です。因数とは約数のことであることは, 素因数分解のところで勉強しました。こうやって, 式も因数で分解していきます。

現行教科書では公式から因数分解をたどっていますが, 今回は因数分解の本質？的なところから入っていきます。それは, 展開すると

$$(x+3)(x+2)=x^2+5x+6$$

なるのであれば,

$$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$$

と因数分解できるということです。ではどうやって考えるか, それは数字に隠されています。6 という数字は最後ある 2 つの数を掛け算して得られた数です。また, 5 はある 2 つの数を足して得られた数ということは公式から分かることです。ここで, 掛け算して 6 になる 2 数を考えた方が有効か, 足して 5 になる 2 数を考えた方が有効かを考えた場合, 整数の範囲に限定しても, 足して 5 になる 2 数の組み合わせは無限にあることに気付くでしょう。そして掛けて 6 になる 2 数の組み合わせ方が有限個です。ですから, 掛けて 6 になる 2 数を考えていきます。掛けて 6 になる数も考え方によっては無限にありますが, 中学校の因数分解は基本的には整数の範囲で行うことが多いので, それはイレギュラーな例としてここでは扱わないことにします。では掛けて 6 になる組み合わせを考えると, 以下の表ができます。

掛けて 6 になる組み合わせ	2 数の和
1 と 6	7
2 と 3	5
-1 と -6	-7
-2 と -3	-5

この表から, 掛けて 6 足して 5 になる 2 数の組み合わせは 2 と 3 になります。したがって, x^2+5x+6 は $(x+3)(x+2)$ と因数分解できるのです。

残りの公式もこれが基本で因数分解できます。例えば, $x^2 - 8x + 16$ の因数分解も, いまやったやり方で解けます。

掛けて 16 になる組み合わせ	2 数の和
1 と 16	17
2 と 8	10
4 と 4	8
-1 と -16	-17
-2 と -8	-10
-4 と -4	-8

この表から, 足して -8 になる組み合わせは -4 と -4 になります。したがって, $x^2-8x+16 = (x-4)(x-4)$ となり, 同じ式は累乗を使って書くので, $(x-4)^2$ と因数分解できます。

次に, $x^2 - 16$ の因数分解も同様に考えることができます。今度は掛けて -16, 足して 0 になる組み合わせを考えればいいので,

掛けて -16 になる組み合わせ	2 数の和
1 と -16	-15
2 と -8	-6
4 と -4	0
-1 と 16	15
-2 と 8	6

この表から, 掛けて -16, 足して 0 の組み合わせは 4 と -4 である。したがって, $x^2 - 16$ は $(x+4)(x-4)$ と因数分解できます。

この 4 パターンが基本になります。

あとはこれらを組み合わせたりしているだけです。少し応用問題をいくつかやって終わりたいと思います。

(1) $ax^2 + 8ax + 12a$ を因数分解しなさい。

(2) $(x+2)^2 + (x+2) - 12$ を因数分解しなさい。

(3) $(a+b)x - (a+b)y$ を因数分解しなさい。

(1) 共通因数 a でくくって, さらに因数分解

$a(x^2 + 8x + 12) = a(x+2)(x+6)$ ……(答)

(2) $x + 2 = A$ とおくと

$A^2 + A - 12$, これを因数分解すると,

$(A+4)(A-3)$

$A = x + 2$ として計算すると,

$\{(x+2)+4\}\{(x+2)-3\} = (x+6)(x-1)$ ……(答)

(3) $a + b = M$ とおくと

$Mx - My$, 共通因数 M でくくると,

$M(x-y)$, $M = a + b$ にもどすと,

$(a+b)(x-y)$ ……(答)