関数と図形

1. 三角形の面積の二等分

この 2 パターンに大別できる。三角形の面積の 2 等分の式を求めるときは,

$\boxed{\text{パターン 1}}$

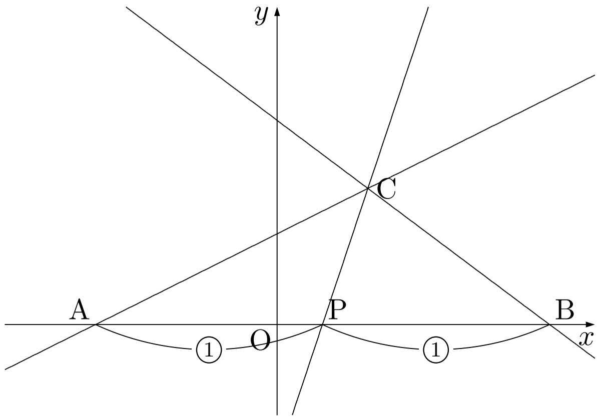
三角形の頂点を通る場合

$\boxed{\text{パターン 2}}$

三角形の頂点を通らない場合

に大別できます。

図 1



$\boxed{\text{パターン 1 の例}}$: 右の図 1 は, 関数 $y = \dfrac{1}{2}x + 2$ と $y = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{9}{2}$ が点 C で交わっている。関数 $y = \dfrac{1}{2}x + 2$ と x 軸との交点を A, 関数 $y = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{9}{2}$ との交点を B とする。このとき, 点 C を通り, △ABC の面積を二等分する式を求めなさない。

解法

問題の点 C は △ABC の頂点の 1 つ。頂点を通る場合は, その頂点と向かい合う辺の中点 P(真ん中の点) を通る直線の式を求めれば片付きます。これは高さが共通の三角形の面積が底辺の比の割合によって分けられるからです。そこで, 点 A, B, C の座標を求めると,

A(−4, 0), B(6, 0), C(2, 3)

AB の中点 P は A と B の座標を筆算で足すと (2, 0), 中点 P はその $\dfrac{1}{2}$(半分) なので, P(1, 0) となる。よって求める直線 CP の式は $y = 3x - 3$ となります。

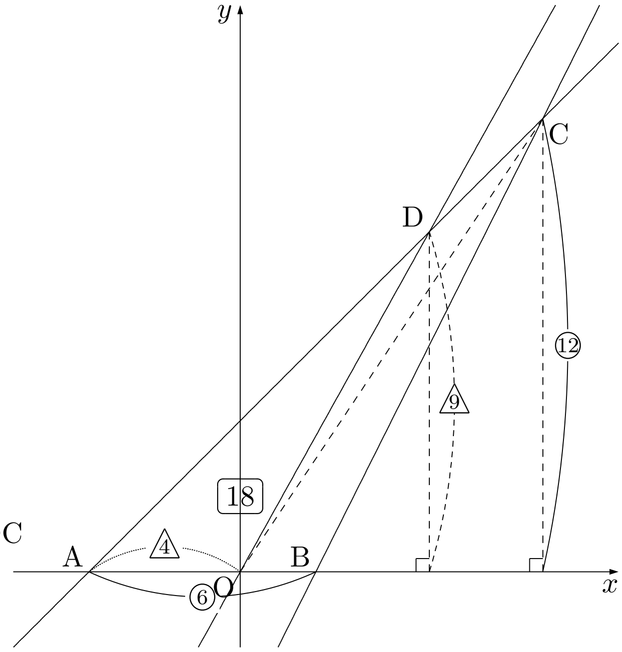
2 点間の中点の出し方 (公式)

2 点 $\mathrm{P}(a, b)$, $\mathrm{Q}(c, d)$ の中点の座標 R

$\mathrm{R}\left(\dfrac{a+c}{2},\ \dfrac{b+d}{2}\right)$

$\boxed{\text{パターン 2 の例}}$: 右の図 2 は, 関数 $y = 2x - 4$ と $y = x + 4$ が点 C で交わっている。$y = x + 4$ と x 軸との交点を A, $y = 2x - 4$ と x 軸との交点を B とするとき, 原点を通り, △ABC の面積を二等分する式を求めなさい。

図 2



解法

こんな場合はとりあえず, A, B, C の座標を出し, △ABC の面積を求める。今回の場合 A(−4, 0), B(2, 0), C(8, 12) であるから, △ABC の面積は 6×12÷2=36 次に, 原点と C を結んでみると, △AOC>△BOC であるから, 面積を二等分する直線を求めるために必要なもう 1 点 D は $y = x + 4$ 上にある。

ここで △OAD の面積は 36 の半分 18 になればよい。ここで, △OAD の底辺は A の座標からも分かるとおり 4 であるから, 求める高さを D_y とすると,

$$4 \times \mathrm{D}_y \div 2 = 18$$

これから, D_y=9

この D_y が D の y 座標で D は $y = x + 4$ 上にあることから,

9= x+4 とおいて, x を求めると, $x = 5$

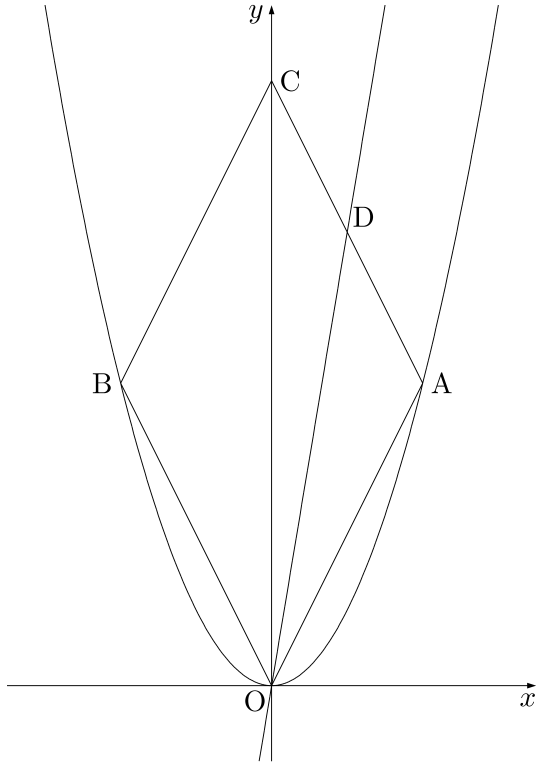
よって D(5, 9) となり, 求める直線の式は $y = \dfrac{9}{5}x$ となる。

2. 今までのは基本で, 四角形の面積を分ける考え方に利用します。

四角形の捉え方は別の攻略方法でもお知らせしていますが, 三角形が 2 つで四角形として捉えるのが大体の考え方です。

例:図 3 は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフで, AB は x 軸に平行でその長さは 8 です。四角形 OABC がひし形のとき, 辺 AC 上に点 D をとり, △OAD と四角形 OBCD の面積比が 1 : 3 となる, 直線 OD の式を求めなさい。(類高知)

図 3



考え方

この問題では四角形 OABC(ひし形 OABC) の面積は OC によって二等分されるので, その半分を, 1 : 3 より (1+3)÷2 = ② とおきます。すると求める D は AC の中点であることがわかります。なぜなら D が AC の中点であることで, △OCD : △OAD=① : ①となり, 四角形 OBCD=△OBC+△OCD=②+①=③
となり, 問題にあるように, △OAD と四角形 OBCD の面積比が 1 : 3 となります。

解法

A(4, 8), C(0, 16) より D(2, 12) であるから, 求める式は $y = 6x$ である。