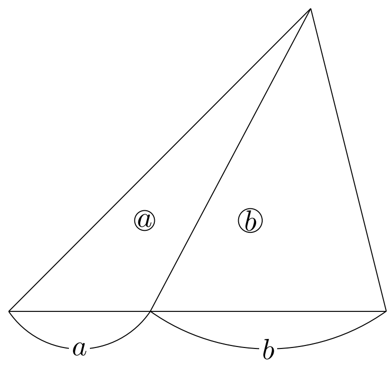
面積比の問題で, 1 つの攻略方法として, 相似比の2乗から攻める方法を紹介しておりますが, 相似な関係がない場合は, 役に立ちません。そこで, 相似な関係がなくてもできる攻略方法を提示できればと思います。ただ, 全てにおいて攻略できるかは不明ですので, その点ご了承ください。

さて, 今回攻略法に使う, 予備知識は右の基本パターンになります。

1 つの三角形の頂点を通る直線で, 2 つの三角形に分けたとき, 2 つの三角形の底辺の長さが, a, b であるなら, 2 つの三角形の面積比は@ : ⓑであるというものです。これを基本パターンとします。

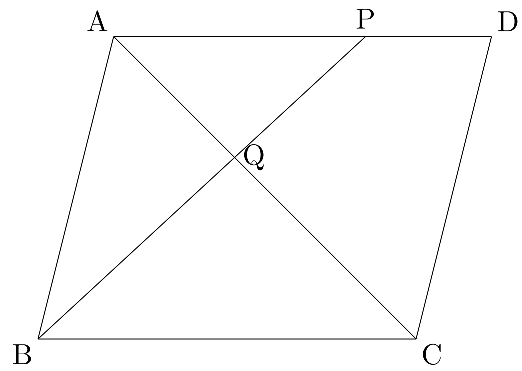
この関係を用いて, 攻略していくことにします。



基本パターン

さて, 次の問題は, 相似比の 2 乗を用いて攻略するのに用いた問題です。右の図で, 右の図で四角形 ABCD は平行四辺形で, P は辺 AD を 2 : 1 に分ける点である。線分 PB と線分 AC の交点を Q とするとき, 次の問いに答えなさい。

(1) 四角形 PQCD の面積と平行四辺形 ABCD の面積の比を最も簡単な整数の比で表しなさい。



ここでは, △APQ∽△CBQ であり, AQ : CQ=2 : 3, PQ : BQ=2 : 3 であることは, 周知の事実としてまいります。

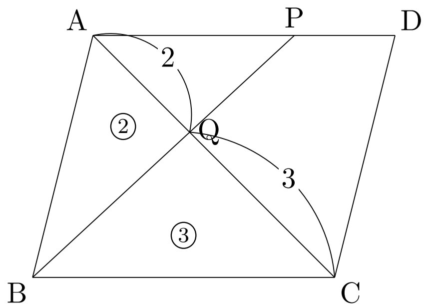
AQ : CQ=2 : 3 であることから, 上の面積比の関係から, △ABQ と △CBQ の面積比は, 基本パターンより, △ABQ : △CBQ=② : ③。

このとき, PQ : BQ=2 : 3 と, △ABQ=②を用いて, △APQ の面積の割合をもとめると, 基本パターンより,

$$2 : 3 = \triangle\mathrm{APQ} : ②$$

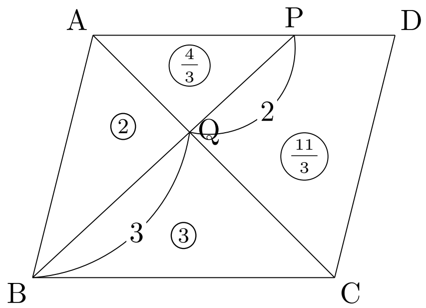
$$\triangle\mathrm{APQ} = \frac{4}{3}$$

となります。



ここで, 平行四辺形 ABCD の半分の面積は △ABC が⑤（②+③）であることから, △ADC も⑤, △APQ=$\frac{4}{3}$ より,

$$\text{四角形 PQCD} = ⑤ - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$$



よって, 求める面積比は,

$$\frac{11}{3} : ⑤ \times 2$$

となり, 整数比にするため, 3 倍して,

$$11 : 30$$

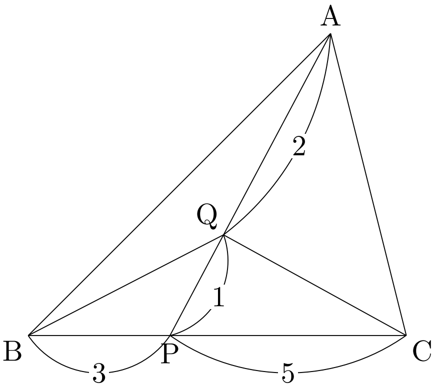
となります。

これで, この方法でもきちんと解くことができます。

これのメリットは, 相似系がなくても対応できるところです。デメリット？は分数がよく出てくるところでしょうか。。。？

次の頁には, 相似系のないものを解いてみます。

右の △ABC で, 辺 BC を 3 : 5 に分ける点を P, AP を 2 : 1 に分ける点を Q とします。このとき, 次の面積比を最も簡単な整数の比で表しなさい。



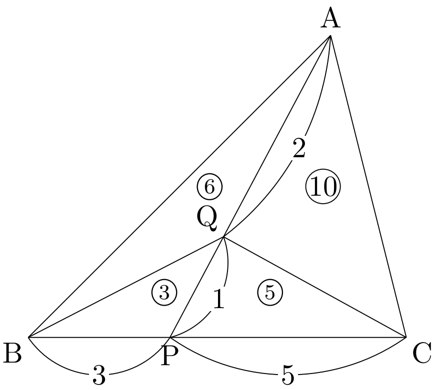
(1) △QBP : △QCP

(2) △AQB : △AQC

(3) △QBP : △ABC

このような問題では, 見た目でもいいので, 一番小さい三角形を基準に考えていけばいいことが多い。本質が見えてくると, 一番小さい三角形を①とすれば事足りてきます。

ここでは, そういうやり方でなくとも, 一番最初の基本パターンから攻めることで, 解けることを実証したいと思います。



ただし, 一番小さい三角形に注目することに変わりはありません。ここでは △QBP が一番小さく, △QBP と △QCP の面積比が, 基本パターンより③ : ⑤(3 : 5) と分かります。

次に △AQB と △QBP の面積比が, 基本パターンより, 2 : 1 であり, △QBP=③であるから,

△AQB : ③ = 2 : 1

△AQB = ⑥

同様に,

△AQC : ⑤ = 2 : 1

△AQC = ⑩

となります。

これで, △ABC の中にある三角形の面積の割合がすべてわかりました。

(1) の答えは

$3 : 5$ ……(答)

(2) の答えは

$6 : 10 = 3 : 5$ ……(答)

(3) の答えは, △ABC= $3 + 5 + 6 + 10 = 24$ となるので,

$3 : 24 = 1 : 8$ ……(答)

どれを基準にしていいかわからないときは, 図の中で, 一番小さい三角形を選んで, 基本パターンに持ち込んだ方がよいですね。相似比の 2 乗から入る問題も基本パターンで解けますからね。こちらの方が汎用性はあるかもです。ではでは。