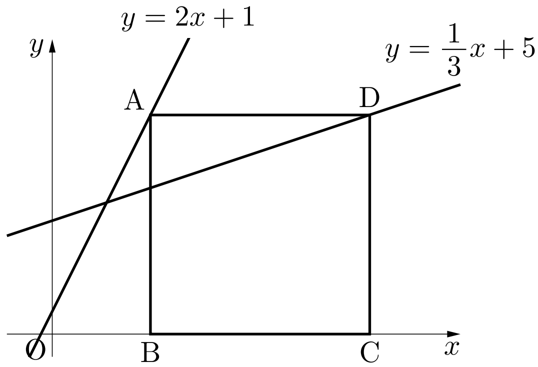
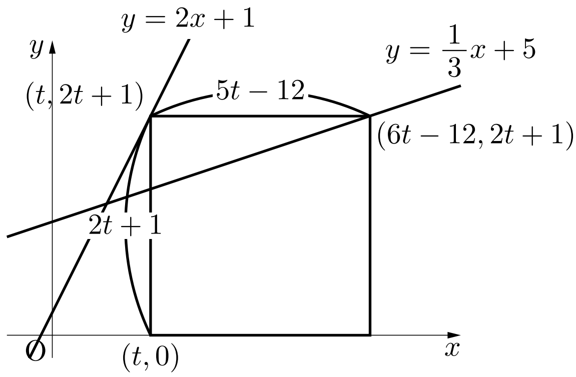
右の図のように, 関数

$$y=2x+1,\ y=\frac{1}{3}x+5$$

のグラフがある。点 A, D はそれぞれのグラフ上の点で, 点 B, C は点 A, D から $x$ 軸に下ろした垂線と $x$ 軸との交点である。四角形 ABCD が正方形になるとき, 点 D の座標を求めよ。〔頻出系問題〕




ここでは, 座標を文字で置く場合の基本的に分かっていなければならないことをご紹介する。途中文字を $t$ や $k$ としているが, あくまで例なので気にしなくてよい。ではいきましょう。




点 A の座標を文字を使って表すことを考えてみる。

そもそも $y=2x+1$ という式の意味は,

$$y\text{ 座標}=2x+1$$

詳しく言えば, $y$ 座標は $2x+1$ という式で表されるということ。実際 $x=1$ のときの $y$ 座標は $y=2\times1+1=3$ となる。だから, 点 A の $x$ 座標を $t$ と置くと, $y$ 座標は $y=2x+1$ の $x$ に $t$ を代入し, $y=2t+1$ とすることで, $y$ 座標 $=2t+1$ と表すことができるようになる。つまり, $y=2x+1$ 上の座標は, $x=t$ とおき, $t$ を用いて表すと, $\mathrm{A}(t, 2t+1)$ となる。

また, 余談？になるが $y=2x+1$ を $x$ について解くと,

$$x=\frac{y-1}{2}$$

となり, 点 A の $y$ 座標を $k(y=k)$ とすることで, 先と同様に $x$ 座標 $=\dfrac{k-1}{2}$ と表すことが可能である。つまり, $y=2x+1$ において, $y=k$ としたときの点 A の座標は, $k$ を用いると $\left(\dfrac{k-1}{2}, k\right)$ と表すことができる。

次に点 A の座標が $\mathrm{A}(t, 2t+1)$ と表されることを用いて, 点 D の座標を $t$ を用いて表してみる。点 D の $y$ 座標は点 A の $y$ 座標と等しいので, $y$ 座標 $=2t+1$ である。つまり, $y=\dfrac{1}{3}x+5$ で $y$ に $2t+1$ を代入すると, $2t+1=\dfrac{1}{3}x+5$ となって, これを $x$ について解くと, $x$($x$ 座標) $=6t-12$ を得ることができ, D の座標は $t$ を用いて $\mathrm{D}(6t-12, 2t+1)$ と表される。

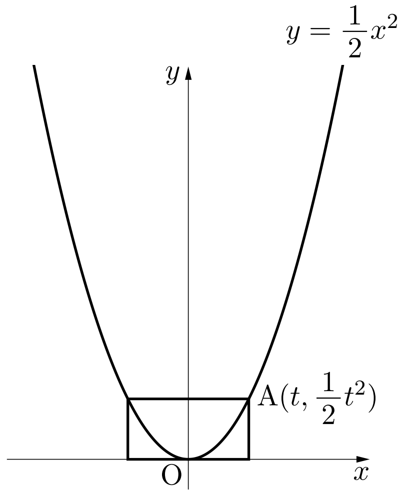
あとは問題に応じて線分の長さを求めていけばよい。例えば線分 AD の長さであれば,

$$\text{線分 AD の長さ}=x\text{ 座標の大きい方}-x\text{ 座標の小さい方}$$

$$\mathrm{AD}=(6t-12)-t=5t-12$$

となり, AD$=5t-12$ となる。

グラフが変わっても考え方は同じである。右図は放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ である。点 A の $x$ 座標を $t$ とすると，$y$ 座標 $= \dfrac{1}{2}x^2$ だから，$\mathrm{A}\left(t, \dfrac{1}{2}t^2\right)$ となる。




これを用いて，座標を文字で置くことを少しでも上達させてください。