

右の図の斜線部分の面積を求めなさい。また、斜線部分の周りの長さを求めなさい。ただし、円周率は $\pi$ とします。  
よく中学校1年生で登場する問題である。ただこの図形は少し奥が深いのです。意外と知らない人が多いので紹介しておきます。あまり参考書にも載ってなかったりするので、個人的にはお気に入りの公式なんですけどね。

実はこの図形の斜線部分の面積は $\frac{25}{2}\pi\text{ cm}^2$ で斜線部分の周りの長さは $10\pi+10\text{ cm}$ なんです。答えを言うと、上の図形で中心角が $90^\circ$ の扇形の半径が $b\text{ cm}$ なら斜線部分の面積は $\frac{b^2}{8}\pi\text{ cm}^2$ であるし、斜線部分の周りの長さは $b\pi+b\text{ cm}$ になります。

以下証明します。

半径 $2a\text{ cm}$ 、中心角 $90^\circ$ の扇形と半径 $a\text{ cm}$ で中心角 $180^\circ$ の扇形が図のように半径OAでぴったり重なっている。このとき斜線部分の面積は次のように与えられる。(半径を $2a\text{ cm}$ としたのは便宜上)

$$\begin{aligned} & 2a \times 2a \times \pi \times \frac{1}{4} - a \times a \times \pi \times \frac{1}{2} \\ &= a^2 - \frac{1}{2}a^2 \\ &= \frac{1}{2}a^2 \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで半径 $a\text{ cm}$ 、中心角 $180^\circ$ の扇形の面積は、

$$a \times a \times \pi \times \frac{180}{360} = \frac{1}{2}a^2 \dots \textcircled{2}$$

①,②より、斜線部分の面積は、斜線部分ではない扇形の面積と同じであることがわかる。

$$(\text{斜線部分の面積}) = \frac{1}{2}a^2\pi$$

次に周りの長さについての証明をします。

半径 $2a\text{ cm}$ 、中心角 $90^\circ$ の弧の長さを求めると、

$$2 \times 2a \times \pi \times \frac{1}{4} = a\pi \dots \textcircled{3}$$

半径 $a\text{ cm}$ 、中心角 $180^\circ$ の弧の長さを求めると、

$$2 \times a \times \pi \times \frac{1}{2} = a\pi \dots \textcircled{4}$$

となり、周りの長さは次式で考えられる。

$$(\text{周りの長さ}) = \textcircled{3} + \textcircled{4} + 2a$$

よって、

$$(\text{周りの長さ}) = 2a\pi + 2a(\text{ cm})$$

