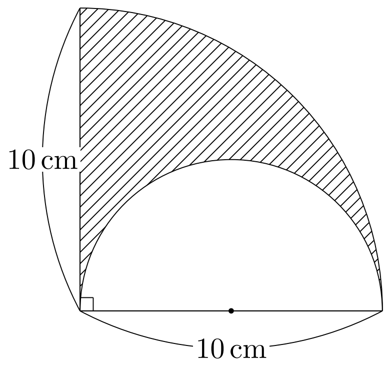
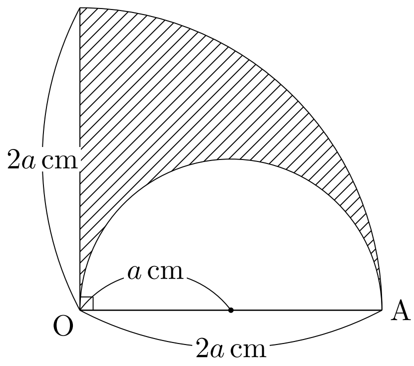
右の図の斜線部分の面積を求めなさい。また、斜線部分の周りの長さを求めなさい。ただし、円周率は π とします。



よく中学校１年生で登場する問題である。ただこの図形は少し奥が深いのです。意外と知らない人が多いので紹介しておきます。あまり参考書にも載ってなかったりするので、個人的にはお気に入りの公式なんですけどね。
実はこの図形の斜線部分の面積は $\dfrac{25}{2}\pi\,\mathrm{cm}^2$ で斜線部分の周りの長さは $10\pi+10\,\mathrm{cm}$ なんです。答えを言うと、上の図形で中心角が 90° の扇形の半径が $b\,\mathrm{cm}$ なら斜線部分の面積は $\dfrac{b^2}{8}\pi\,\mathrm{cm}^2$ であるし、斜線部分の周りの長さは $b\pi+b\,\mathrm{cm}$ になります。
以下証明します。



半径 $2a\,\mathrm{cm}$, 中心角 90° の扇形と半径 $a\,\mathrm{cm}$ で中心角 180° の扇形が図のように半径 OA でぴったり重なっている。このとき斜線部分の面積は次のように与えられる。(半径を $2a\,\mathrm{cm}$ としたのは便宜上)

$$2a\times 2a\times\pi\times\frac{1}{4}-a\times a\times\pi\times\frac{1}{2}$$
$$=a^2-\frac{1}{2}a^2$$
$$=\frac{1}{2}a^2\cdots①$$

ここで半径 $a\,\mathrm{cm}$, 中心角 180° の扇形の面積は、

$$a\times a\times\pi\times\frac{180}{360}=\frac{1}{2}a^2\cdots②$$

①,②より、斜線部分の面積は、斜線部分ではない扇形の面積と同じであることがわかる。
(斜線部分の面積)$=\dfrac{1}{2}a^2\pi$
次に周りの長さについての証明をします。
半径 $2a\,\mathrm{cm}$, 中心角 90° の弧の長さを求めると、

$$2\times 2a\times\pi\times\frac{1}{4}=a\pi\cdots③$$

半径 $a\,\mathrm{cm}$, 中心角 180° の弧の長さを求めると、

$$2\times a\times\pi\times\frac{1}{2}=a\pi\cdots④$$

となり、周りの長さは次式で考えられる。
(周りの長さ)$=③+④+2a$
よって、
(周りの長さ)$=2a\pi+2a(\,\mathrm{cm})$