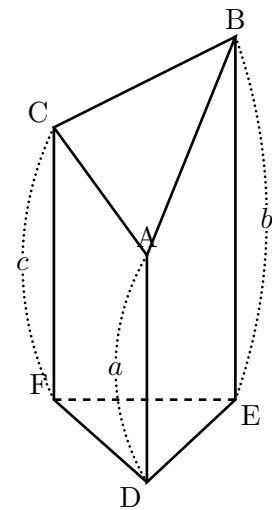


立体の切断で覚えておいた方がいい式を書いておきましょう。
 右の立体 (三角柱を斜めに切ったもの) の体積 V は底面積を S とすると、

$$V = S \times \frac{a+b+c}{3}$$

で与えられる。



上の立体を下のように底面に平行な面で、点 A を通る平面 AGH で切ると、底面が台形 CHGB の四角錐 A-CHGB ができる。その高さを AI とすると、この四角錐の体積は

$$\begin{aligned} (CH + BG) \times HG \times \frac{1}{2} \times AI &= (CH + BG) \times HG \times AI \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} (CH + BG) \times \triangle DEF \end{aligned}$$

ある。

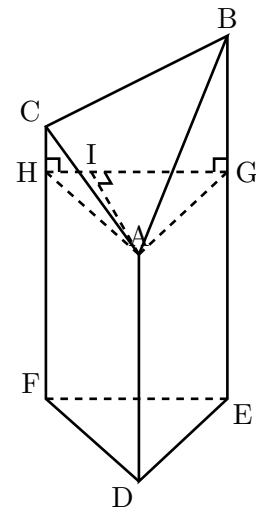
ここで、三角柱 AGH-DEF の体積は次のように書ける。

$$\triangle DEF \times AD = \triangle DEF \times (AD + GE + HF) \times \frac{1}{3}$$

これより、もとの立体 ABC-DEF の体積 V は三角柱 AGH-DEF + 四角錐 A-CHGB で求まるので、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} (CH + BG) \times \triangle DEF + \triangle DEF \times (AD + GE + HF) \times \frac{1}{3} \\ &= \triangle DEF \times \frac{1}{3} \{AD + (BG + GE) + (CH + HF)\} \\ &= S \times \frac{a+b+c}{3} \end{aligned}$$

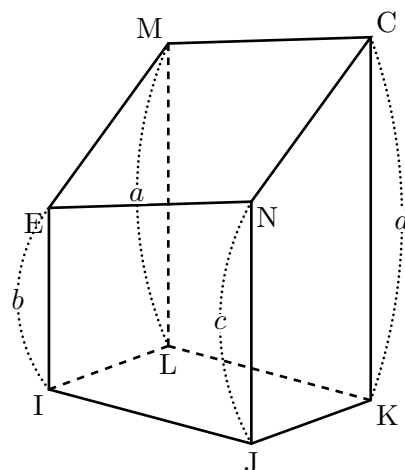
したがって、最初の体積の公式が得られる。



右の立体(直方体を斜めに切ったもの)の体積 V は底面積を S とすると,

$$V = S \times \frac{a+b+c+d}{4}$$

で与えられる。



立体の切り口は平行四辺形になる。MC, EN は同一平面上にあり, 面 EIJN と面 MLKC は平行であるから, $MC \parallel EN$, 同様に $ME \parallel CN$ だから 2 組の向かい合う辺がそれぞれ平行なので, 四角形 MENC は平行四辺形である。

先の立体を立体 CNEM-EFGH と直方体 EFGH-IJKL に分ける。そしてさらに立体 CNEM-EFGH を 2 つの切断された三角柱 EMC-EGH, ENC-EFG に分ける。 $EF = x$, $FG = y$, $MH = e$, $0(\text{点 E}) = f$, $NF = g$, $CG = h$ とする。このとき前のページにある切断された三角柱の公式を使うと,

$$\text{立体 EMC} - \text{EGH} = xy \times \frac{1}{2} \times \frac{e+f+h}{3}$$

$$\text{立体 ENC} - \text{EFG} = xy \times \frac{1}{2} \times \frac{f+g+h}{3}$$

この 2 つを足すと立体 CNEM-EFGH が求まるので, 加えると

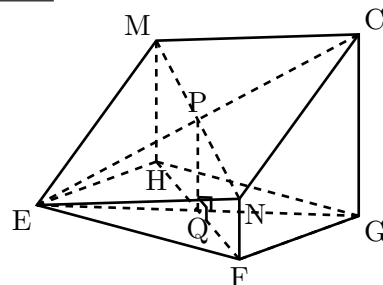
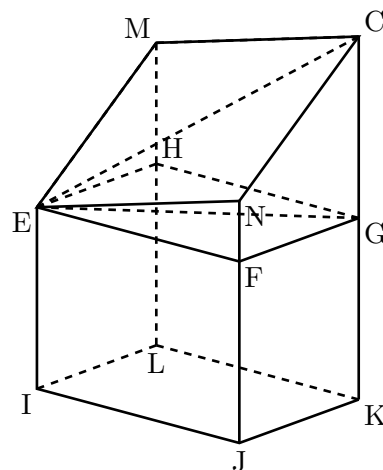
$$\begin{aligned} \text{立体 CNEM} - \text{EFGH} &= xy \times \frac{1}{2} \times \frac{e+f+h}{3} + xy \times \frac{1}{2} \times \frac{f+g+h}{3} \\ &= xy \times \frac{e+g+2f+2h}{6} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで, 平行四辺形 MENC の対角線の交点を P, 長方形 EFGH の対角線の交点を Q とすると, それぞれ対角線の中点で交わるので, 線分 PQ は長方形 EFGH に垂直に交わる。このとき, 中点連結定理を用いると次の関係式が得られる。

$$PQ = \frac{e+g}{2} = \frac{f+h}{2}$$

つまり

$$e+g = f+h \dots \textcircled{2}$$



である。①, ②より,

$$\begin{aligned}
 \text{立体 CNEM} - \text{EFGH} &= xy \times \frac{e + g + 2f + 2h}{6} \\
 &= xy \times \frac{f + h}{2} \dots (\alpha) \\
 &= xy \times \frac{2f + 2h}{4} \text{ 分子} = (f + h) + (f + h) = (e + g) + (f + h) \\
 &= xy \times \frac{e + f + g + h}{4} \dots \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

また直方体 EFGH-IJKL の体積は,

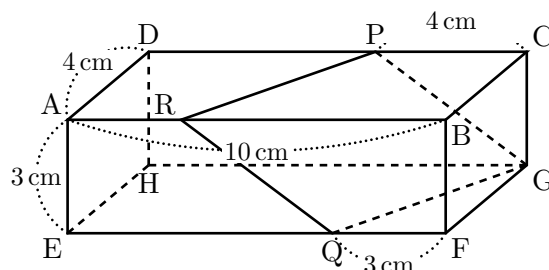
$$\begin{aligned}
 \text{直方体 EFGH} - \text{IJKL} &= xy \times EI \\
 &= xy \times \frac{EI + FJ + GK + HL}{4} \dots \textcircled{4}
 \end{aligned}$$

であるから, ③, ④より, もとの立体 MENC-IJKL は

$$\begin{aligned}
 \text{立体 MENC} - \text{IJKL} &= \text{立体 CNEM} - \text{EFGH} + \text{直方体 EFGH} - \text{IJKL} \\
 &= xy \times \frac{e + f + g + h}{4} + xy \times \frac{EI + FJ + GK + HL}{4} \\
 &= xy \times \frac{(e + HL) + (f + HJ) + (g + FJ) + (h + GK)}{4} \\
 &= xy \times \frac{a + b + c + d}{4} \\
 &= S \times \frac{a + b + c + d}{4}
 \end{aligned}$$

【使用例】図のように, AB=10 cm, AD=4 cm, AE=3 cm の直方体がある。辺 CD 上に CP=4 cm となる点 P, 辺 EF 上に FQ=3 cm となる点 Q をとる。さらに, 辺 AB 上に点 R を 4 点 P, R, Q, G が同じ平面上にあるようにとると, 四角形 PRQG は平行四辺形となる。

このとき, (1)~(3) の各問いに答えなさい。



(1) RQ の長さを求めなさい。

(2) RB の長さを求めなさい。

(3) 直方体 PRQG で 2 つの立体に分ける。その 2 つの立体のうち, 頂点 A を含む立体の体積を V_1 , 頂点 B を含む立体の体積を V_2 とするとき, $V_1 : V_2$ を最も簡単な整数の比で表わしなさい。

〔佐賀〕

この佐賀県の (3) の問題は上の公式を使えば, 体積を求めることなく答えが出せる。

$$AR=3 \text{ cm}, RB=7 \text{ cm} \text{ であるから, } V_1 : V_2 = \frac{3+10}{2} : \frac{7+0}{2} = 13 : 7 \dots (\text{答})$$

ここで, 直方体の場合, 向かい合っている高さを 1 組選んで平均をとればよい。これは上の (α) の式からも分かる。

【余談】2ページの①式が得られるための条件は、四角形を1本の対角線で区切った2つの三角形の面積が等しいことが必要である。つまり、(底辺) \times (高さ)が等しいことが必要不可欠。ここでは底面が長方形であるから、面積は等しくなる。底面が台形などでは対角線で区切ると2つの三角形の面積比は、(上底) : (下底)となり、基本台形では上底と下底は異なるので、この公式は使えないということになる。この公式を理屈を知らずして乱発するのは誤答につながりそうだ。僕もやってしまいそうである(笑)。でもこの証明は面白かった。では。