公式１

$y = ax^2$のグラフ上の 2 点 $P(p, ap^2), Q(q, aq^2)$ を通る直線の式は$y = a(p+q)x - apq$で与えられる。

証明

二次関数$y = ax^2$のグラフ上の２点P, Qの変化の割合 (直線PQの傾き) を調べる。この２点P, Qの変化の割合は、$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$で求められるから、

$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \dfrac{aq^2 - ap^2}{q-p} = \dfrac{a(q^2-p^2)}{q-p}$

$= \dfrac{a(q+p)\cancel{(q-p)}}{\cancel{q-p}} = a(p+q)$…①

よって、①は２点P, Qの変化の割合、すなわち２点P, Qの直線の傾きを表します。ですから、この直線の式は、

$y = a(p+q)x + b$(bは定数)…②

となります。ここで、このグラフは２点P, Qを通るのだから、点Pの座標$P(p, ap^2)$を②に代入すると、

$ap^2 = a(p+q) \times p + b$

$ap^2 = ap^2 + apq + b$

bについて解くと、

$b = -apq$

よって、直線PQ(②式) は次のようになる。

$y = a(p+q)x - apq$