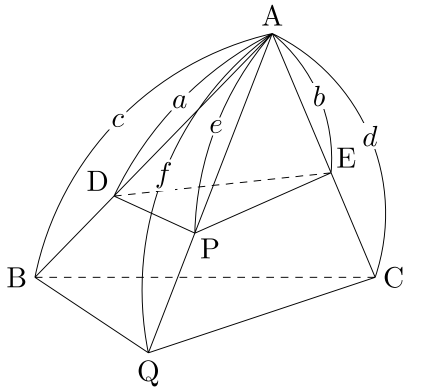
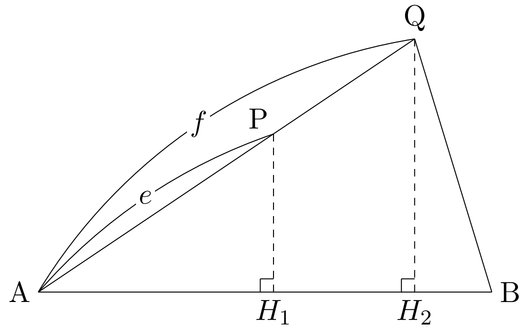
公式 3

右の図の三角錐で、三角錐 $A-DPE$ と三角錐 $A-BQC$ の体積比は $abe:cdf$ になる。



証明

$\triangle ABC$ を底面として三角錐を考えると、公式 2 より底面の面積比は $ab:cd$ である。
ここでその底面に対する高さは、右の図から、$\triangle AH_1P \backsim \triangle AH_2Q$ を使って、
$PH_1:QH_2=e:f$
よって
三角錐 $A-DPE$ と三角錐 $A-BQC$ の体積比は $abe:cdf$ となる。



詳細

$\triangle ABC$ を底面とし、$\triangle ABC$ の面積を S とすると、$\triangle ADE$ の面積は $\dfrac{ab}{cd}S$ である。
それぞれの底面に対する三角錐の高さのは、図より PH_1, QH_2 であるから、
三角錐 $A-DPE=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{ab}{cd}S\times PH_1$
三角錐 $A-BQC=\dfrac{1}{3}\times S\times QH_2$
である。
三角錐 $A-DPE$: 三角錐 $A-BQC=$
$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{ab}{cd}S\times PH_1:\dfrac{1}{3}\times S\times QH_2\cdots$①
ここで $PH_1:QH_2=e:f$
よって $PH_1=ke, QH_2=kf$(k は 0 でない定数) とおけるので、これを①に代入すると、
三角錐 $A-DPE$: 三角錐 $A-BQC$
$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{ab}{cd}S\times ke:\dfrac{1}{3}\times S\times kf=abe:cdf$