Basic of Basic

公式・定理ハンドブック

製作 相城　啓志

初版 1/7/2012

1　数量関係・場合の数・確率

1 絶対値

数直線上で原点 0 からの距離

2 括弧のはずし方

$$\left.\begin{array}{l}+(+5)\\-(-5)\end{array}\right\}+5\ (\text{同符号は}+)\qquad\left.\begin{array}{l}-(+5)\\+(-5)\end{array}\right\}-5\ (\text{異符号は}-)$$

3 約数・倍数

自然数 a, b があり、$a = b \times n$(n は自然数) と表せるとき、a は b の倍数であり、b は a の約数である。

4 逆数

A×B=1 になる関係のとき、A は B の逆数という。または B は A の逆数ともいう。

5 交換法則と結合法則

① 加法の交換法則 $a + b = b + a$

② 乗法の交換法則 $a \times b = b \times a$

③ 加法の結合法則 $(a + b) + c = a + (b + c)$

④ 乗法の結合法則 $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

6 分配法則

$$a\ (b + c) = ab + ac$$

$$(b + c) \times a = ab + ac$$

7 素数 1 とその数自身しか約数にもたない数。
2,3,5,7,11,13 などがある。

8 指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$
$a^m \div a^n = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{mn}$
$a^0 = 1$
$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

9 項と係数 (単項式・多項式)
$5x, -6, ab$ のように数と文字の積、数だけの式を単項式という。$5x - y - 8$ のように単項式の和の形になってる式を多項式という。
項は、多項式を符号の前で区切った 1 つ 1 つの単項式のことを項という。$5x - y - 8$ を符号の前で区切ると、
$5x/ - y/ - 8 \cdots$ ①
となるので、項は $5x, -4y, -8$ となる。
係数は文字の項にあり、その文字にかけられている数のことである。
① の文字を含む項は $5x, -y$ であるから、その係数を求めると、
x の係数は 5
y の係数は -1
である。

10 次数
単項式の次数 $\cdots$ かけ合わさっている文字の個数
$5x \cdots$ 次数 1(一次式)、$8ab^2 \cdots$ 次数 3(三次式)
多項式の次数 $\cdots$ 各項の最高次数をその式の次数とする。
例 $5x^2 + 3xy - xyz$
$5x^2 \cdots$ 次数 2、$3xy \cdots$ 次数 2、$-xyz \cdots$ 次数 3
最高次数は 3 なので、この式の次数は 3(三次式)

11 等式の性質

A=B ばらば、

① A+C=B+C

② A−C=B−C

③ A×C=B×C

④ A÷C=B÷C

⑤ B=A

12 素因数分解

自然数を素数の積の形に表すこと。

$12 = 2^2 \times 3$

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

13 乗法公式

① 展開の基本

$$(a+b)\quad(x+y) = ax + ay + bx + by$$

② 乗法公式

① $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

② $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

③ $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

④ $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$

14 置き換えによる展開と因数分解

$(a+b+5)(a+b-3)$ を展開しなさい。

$a+b=X$ と置く。

$$
\begin{aligned}
(a+b+5)(a+b-3) &= (X+5)(X-3) \\
&= X^2+2X-15 \\
&= (a+b)^2+2(a+b)-15 \\
&= a^2+2ab+b^2+2a+2b-15
\end{aligned}
$$

$(x+6)^2-5(x+6)+6$ を因数分解しなさい。

$x+6=M$ と置く

$$
\begin{aligned}
(x+6)^2-5(x+6)+6 &= M^2-5M+6 \\
&= (M-2)(M-3) \\
&= \{(x+6)-2\}\{(x+6)-3\} \\
&= (x+4)(x+3)
\end{aligned}
$$

15 平方根の大小

$a>b>0$ のとき、

$\sqrt{a}>\sqrt{b}$

16 平方根の計算

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

$m\sqrt{a}+n\sqrt{a}=(m+n)\sqrt{a}$

$m\sqrt{a}-n\sqrt{a}=(m-n)\sqrt{a}$

17 分母の有理化

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sqrt{b}} &= \frac{a\times\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}\\ &= \frac{a\sqrt{b}}{b}\end{aligned}$$

18 有理数と無理数

有理数 $\cdots$ 分数で表せる数 ($3,0.4,\dfrac{2}{7},\sqrt{49}$ など)

無理数 $\cdots$ 分数で表わせない数 ($\sqrt{3},5\sqrt{7},\pi$ など)

19 有限小数・循環小数・循環しない小数

有限小数 $\cdots$ 有理数 (0.5,0.25 など)

循環小数 $\cdots$ 有理数 ($0.272727\cdots$ など)

循環しない小数 $\cdots$ 無理数 ($\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ など)

20 二次方程式の解の公式

二次方程式

$ax^2+bx+c=0$ の解の公式

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

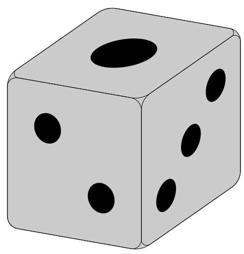
21 場合の数
場合の数を考えるとき、数えもれがないか確認することと、重複がないか確認することが大切である。

22 場合の数の和と積の法則

① 同時に起こらない 2 つの事柄 E_1,E_2 がある。E_1 の起こる場合の数が p 通り、E_2 の起こる場合の数が q 通りのとき、事柄 E_1 または E_2 の起こる場合の数は、$p+q$ 通りである。

② 事柄 E_1 の起こる場合の数が p 通り、その p 通りの各々に対して事柄 E_2 の起こりうる場合の数が q 通りあるとき、E_1, E_2 がともに起こる場合の数は $p \times q$ 通りである。

23 確率
ある試行で、起こりうるすべての場合の数が全部で N 通りあって、どの場合も同様に確からしいとき、そのうちある事柄 E の起こる場合の数が n 通りあるとき、事柄 E の起こる確率 $P(E)$ は、
$P(E) = \dfrac{n}{N}$

24 余事象

ある試行で、すべての事柄において E という事柄が起こることに対して、E が起こらないとういことを E の余事象という。
例 : 大小 2 つのさいころを同時に投げるとき、少なくとも 1 つは奇数の目である確率を求めなさい。
この場合、奇数の目を考えるとその場合の数が多い。そこで少なくとも 1 つが奇数の目でない場合を考える。つまり、2 つとも偶数の目である場合がこの問題の余事象になる。それを考えると、(2,2),(2,4),(2,6), (4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6) となり、9 通り、さいころの目の出方は 36 通りなので、少なくとも 1 つが奇数の目の場合の数は、$36-9=27$(通り) よって、答えは $\dfrac{27}{36}=\dfrac{3}{4}$ である。
$\dfrac{3}{4}$ ……(答)

2　関数関係

1 関数

x の値を 1 つ決めると、それに伴う y の値がただ 1 つに決まるとき、y は x の関数であるという。

2 変化の割合

変化の割合 $= \dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$

変化の割合がどこをとっても一定の場合、グラフは直線を描く。変化の割合が一定でなければ、グラフは曲線を描く。

3 比例

1. x の値が 2 倍,3 倍,$\cdots$ となると、y の値もそれに伴って 2 倍,3 倍,$\cdots$ となるとき、y は x に比例するという。
2. 式：$y = ax$(a は比例定数)
3. グラフは原点を通る直線になる。
4. 変化の割合は一定である。

4 反比例

1. x の値が 2 倍,3 倍,$\cdots$ となると、y の値はそれに伴って $\dfrac{1}{2}$ 倍,$\dfrac{1}{3}$ 倍,$\cdots$ となるとき、y は x に反比例するという。
2. 式：$y = \dfrac{a}{x}$(a は比例定数)
3. グラフは双曲線になる。
4. 変化の割合は一定ではない。

5 一次関数

1. y が x の一次式で表される関係式を一次関数という。
2. 式：$y = ax + b$(a は傾き,b は切片),a は変化の割合ともいう。
3. グラフは切片 b を通る直線になる。$b = 0$ のとき、比例の式と一致する。すなわち比例も一次関数である。
4. 変化の割合が常に一定である。

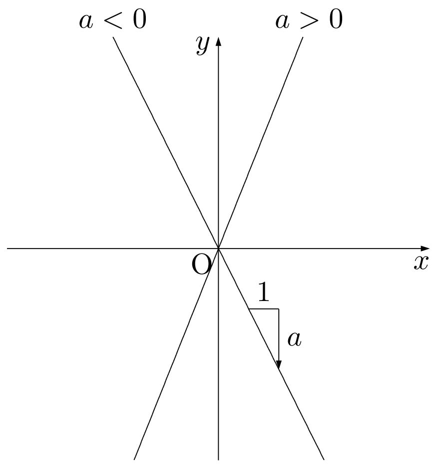
6 2 乗に比例する関数

1. x と y の関係が次式で表される関係を y は x の 2 乗に比例するという。
2. 式：$y = ax^2$(a は比例定数)
3. グラフは原点を通る放物線になる。
4. 変化の割合は一定ではない。

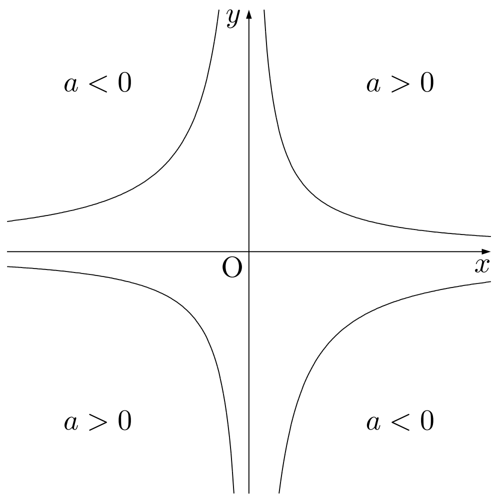
7 前頁のまとめ

関数	一般式	グラフの特徴	変化の割合
比例 (一次関数)	$y = ax$	原点を通る直線	一定である
反比例	$y = \dfrac{a}{x}$	双曲線	一定でない
一次関数	$y = ax + b$	点 $(0, b)$ を通る直線	一定である
x の 2 乗に比例する関数 (二次関数)	$y = ax^2$	原点を通る放物線	一定でない

8 比例のグラフの特徴
$a > 0 \cdots$ 右上がりの直線
$a < 0 \cdots$ 右下がりの直線



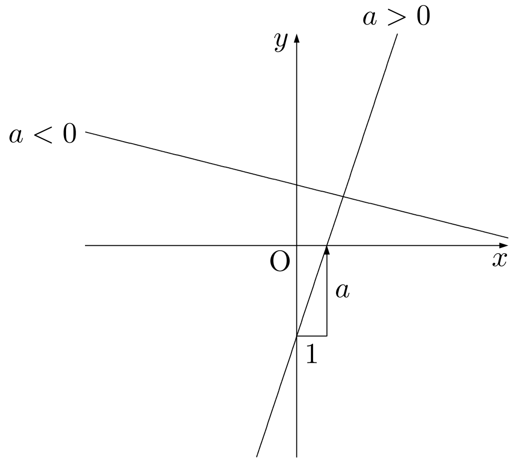
9 反比例のグラフの特徴
原点について対称な双曲線



10 一次関数のグラフの特徴

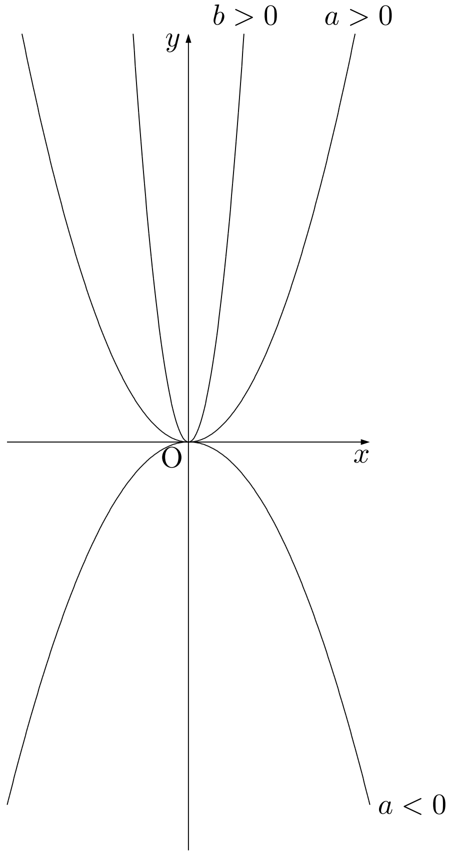
$a > 0 \cdots$ 右上がりの直線

$a < 0 \cdots$ 右下がりの直線



11 2 乗に比例する関数のグラフの特徴

$y = ax^2$ のグラフは $a > 0$ のとき、上に開き (下に凸)、$a < 0$ のとき、下に開く (上に凸)。また $y = ax^2$ と $y = bx^2$ のグラフでは比例定数の絶対値が大きいほうが開き方は小さく、比例定数が小さほうが開き方は大きい。



12 変化の割合
x の変域が $p \leqq x \leqq q$ のとき、次の関数の変化の割合を求めなさい。

① 比例 $y = ax$
変化の割合 $\cdots x$ の変域に関係なく一定で a

② 反比例 $y = \dfrac{a}{x}$
変化の割合 $\cdots -\dfrac{a}{pq}$

③ 一次関数 $y = ax + b$
変化の割合 $\cdots x$ の変域に関係なく一定で a

④ x の 2 乗に比例する関数 (二次関数)$y = ax^2$
変化の割合 $\cdots a(p+q)$

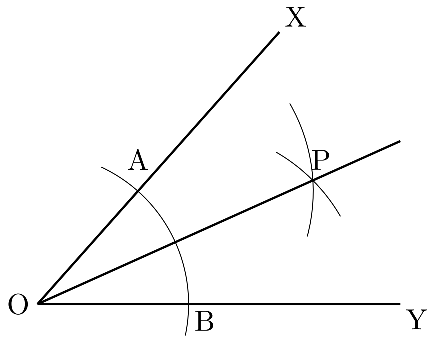
3　図形関係

1 距離

2 点 A,B 間の距離は線分 AB である。

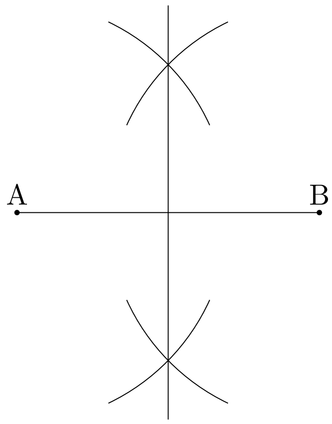
2 角の二等分線

2 辺から等しい距離にある点の集合



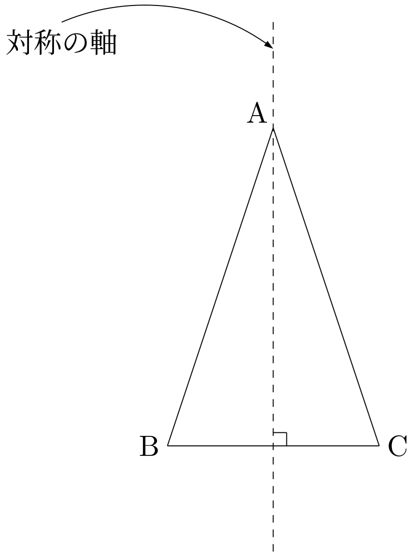
3 垂直二等分線

2 点から等しい距離にある点の集合



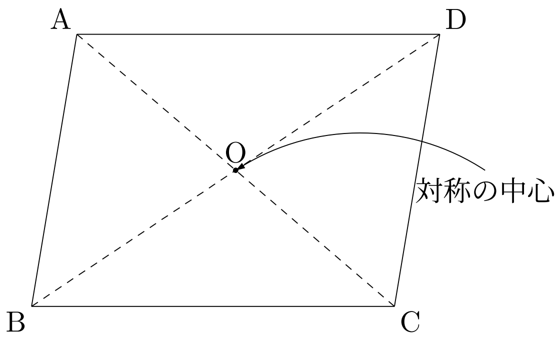
4 線対称な図形

対称の軸を折り目として、ぴったりと重なる図形。
対称の軸は線対称な図形を合同な 2 つの図形に分ける。
アルファベットでは A、B、C、H、I など。
正 n 角形の対称の軸の本数は n 本ある。

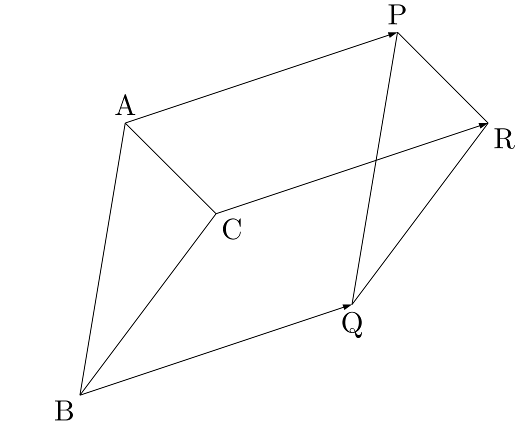


5 点対称な図形

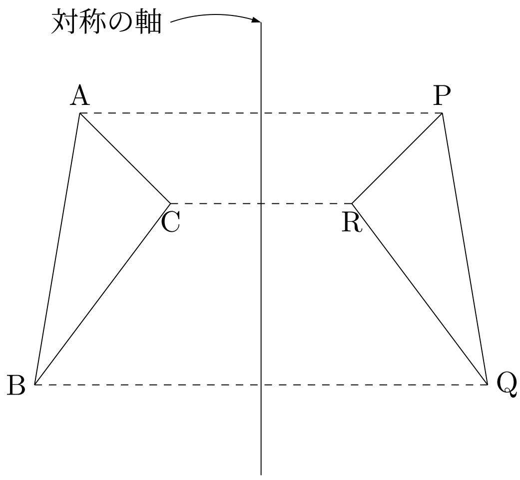
対称の中心を起点にひっくり返しても形が変わらない図形。
アルファベットでは H、I、O、Z、N など。



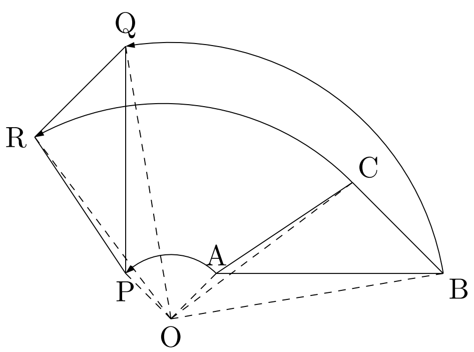
6 平行移動
ある図形を平行に一定の距離だけ移動させる移動方法。



7 対称移動
ある図形を対称の軸を折り目として折り返して移動させる移動方法。



8 回転移動
回転の中心 O を中心に図形を一定の角度回転させる移動方法。
180° の移動方法を点対称移動という。

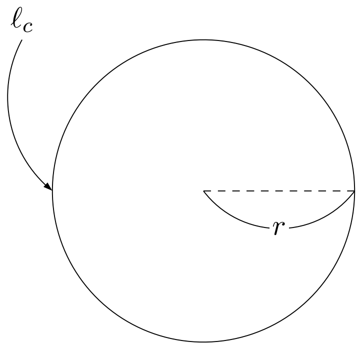


9 円、扇形

半径 r の円の円周の長さ ℓ_c と、面積 S_c は次の式で与えられる。

$\ell_c = 2\pi r$

$S_c = \pi r^2$



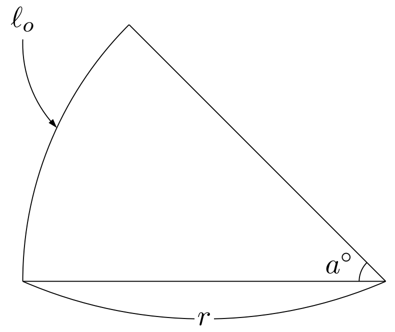
半径 r, 中心角 a° の扇形の弧の長さ ℓ_o と、面積 S_o は次の式で与えられる。

$\ell_o = 2\pi r \times \dfrac{a}{360}$

$S_o = \pi r^2 \times \dfrac{a}{360}$

$S_o = \dfrac{1}{2}\ell r$

$a = 360^\circ$ なら円の円周 ℓ_c、面積 S_c と一致する。



10 平面の決定

① 異なる 3 点を含む平面

② 交わる 2 直線を含む平面

③ 平行な 2 直線を含む平面

ねじれの位置 $\cdots$ 同一平面上にない 2 直線 (交わらなく、かつ平行でない 2 直線の関係)

11 円錐の公式

体積 V

$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

側面積 S_s

$S_s=\dfrac{1}{2}\ell R$

または、

$S_s=\pi r R$

表面積 S_h

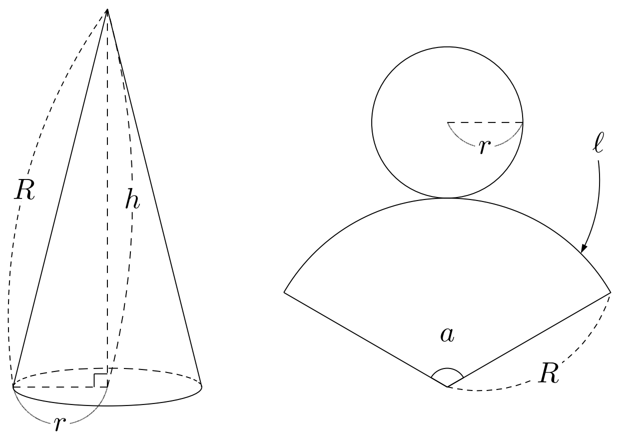
$S_h=\dfrac{1}{2}\ell R+\pi r^2$

または、

$S_h=\pi r R+\pi r^2$

側面の扇形の中心角 $a°$

$a°=360°\times\dfrac{r}{R}$



12 円柱の公式

体積 V

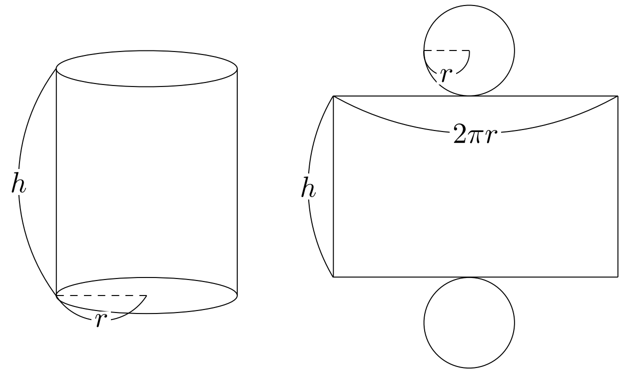
$V=\pi r^2 h$

側面積 S_s

$S_s=2\pi r h$

表面積 S_h

$S_h=2\pi r h+2\pi r^2$



13 球

球の体積 V

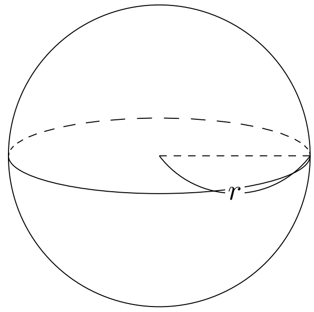
$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

(覚え方:身の上に心配あるので参上)

球の表面積 S_h

$S_h=4\pi r^2$ (覚え方:心配ある事情)

球



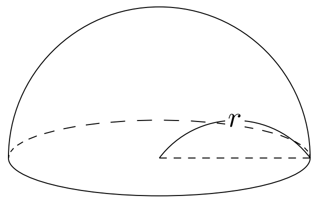
半球の体積 V

$V=\dfrac{2}{3}\pi r^3$

球の表面積 S_h

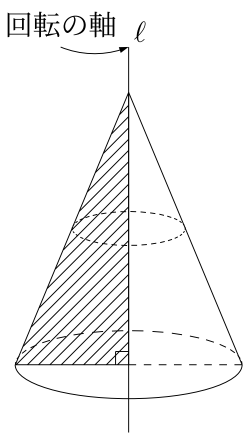
$S_h=3\pi r^2$

半球



14 回転体

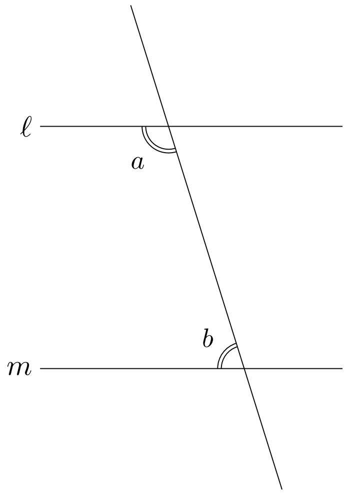
ℓ を回転の軸といい、回転の軸を中心に 1 回転させてできる立体を回転体という。回転体は、回転の軸を含む平面で切ると、その切り口の図形は線対称な図形になる。また、回転の軸に垂直に切るとその切り口は円になる。



15 平行線と角

平行な 2 直線 ($\ell//m$) のとき、同位角は等しい。また、錯角も等しい。

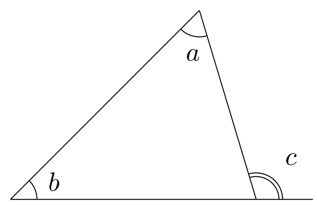
同側内角の和は 180°($\angle a+\angle b=180°$)



16 三角形の外角

三角形の 1 つの外角は、それと隣り合わない 2 つの内角の和に等しい。

$\angle a+\angle b=\angle c$



17 多角形の角

① 多角形 $\cdots$ 線分で囲まれた図形

② n 角形の内角の和は、$180° \times (n-2)$

③ 多角形の外角の和は 360°

18 正 n 角形の角

① 正多角形 $\cdots$ すべての辺が等しく、すべての角の大きさも等しい多角形

② 正 n 角形の 1 つの外角の大きさ $\cdots \dfrac{360°}{n}$

③ 正 n 角形の 1 つの内角の大きさ $\cdots 180° - \dfrac{360°}{n}$

19 三角形の合同条件

① 3 辺 がそれぞれ等しい。

② 2 辺 とその間の角がそれぞれ等しい。

③ 1 辺 とその両端の角がそれぞれ等しい。

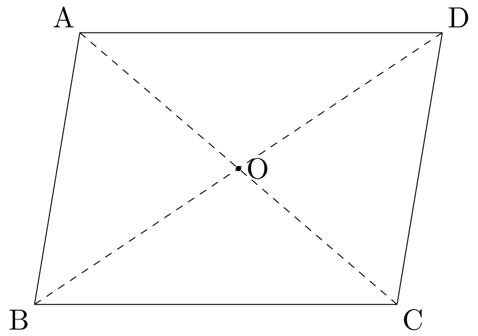
20 直角三角形の合同条件

① 斜辺と他の一辺がそれぞれ等しい。

② 斜辺と一つの鋭角がそれぞれ等しい。

+ 三角形の合同条件
直角三角形も普通の三角形と同じ三角形の合同条件は使えます。

21 平行四辺形の性質



① 2 組の向かい合う辺が平行。(定義)

② 2 組の向かい合う辺が等しい。

③ 2 組の向かい合う角が等しい。

④ 対角線がそれぞれの中点で交わる。

22 平行四辺形になるための条件

① 2 組の向かい合う辺がそれぞれ平行。

② 2 組の向かい合う辺がそれぞれ等しい。

③ 2 組の向かい合う角がそれぞれ等しい。

④ 対角線がそれぞれの中点で交わる。

⑤ 1 組の向かい合う辺が等しくて平行。

23 三角形の相似条件

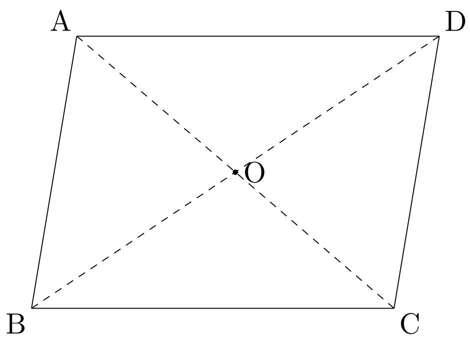
1. 3 組の辺の比がすべて等しい。
2. 2 組の辺の比が等しくその間の角が等しい。
3. 2 組の角がそれぞれ等しい。

ちなみに入試に良く出題されるのは、3の問題である。

24 特別な平行四辺形

1. 長方形 ··· 4 つの角が等しい四角形
   性質 ··· 対角線の長さが等しい
2. ひし形 ··· 4 つの辺が等しい四角形
   性質 ··· 対角線が垂直に交わる
3. 正方形 ··· 4 つの角が等しく、4 つの辺が等しい四角形
   性質 ··· 対角線の長さが等しく、垂直に交わる。

25 平行四辺形の面積対角線によって分けられた 4 つの四角形の面積はすべて等しい。
$\triangle\mathrm{ABO} = \triangle\mathrm{BCO} = \triangle\mathrm{CDO} = \triangle\mathrm{DAO}$



26 三角形の面積比 1

図 1

$\triangle$ABD : $\triangle$ADC $= a : b$

図 2

AD//BC

$\triangle$CAD : $\triangle$ABC $= a : b$

図 3

$\triangle$ABC : $\triangle$BDC $= a : b$

図 1

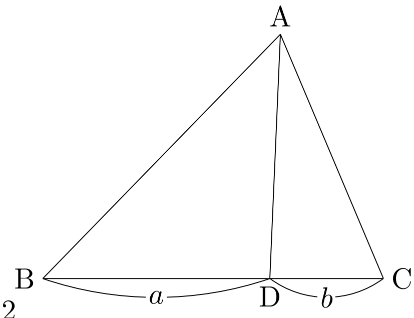


図 2

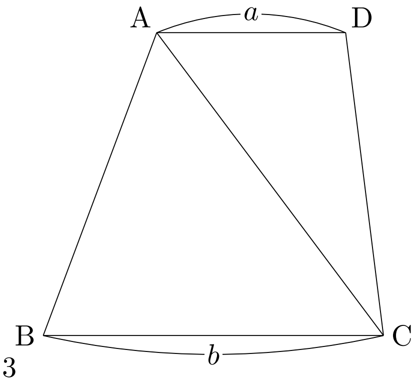
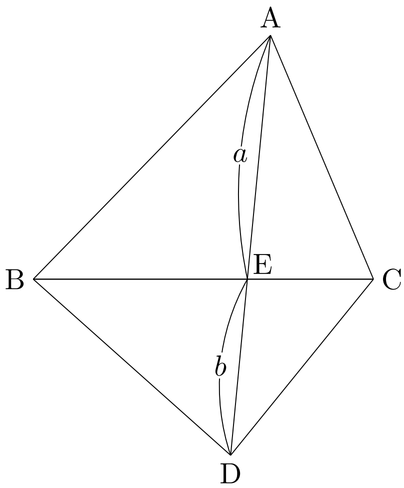
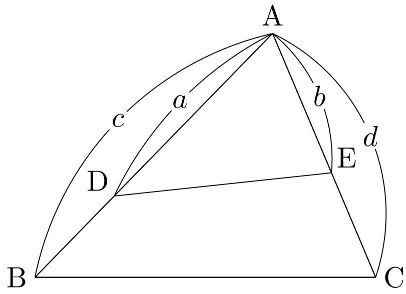


図 3



27 三角形の面積比 2

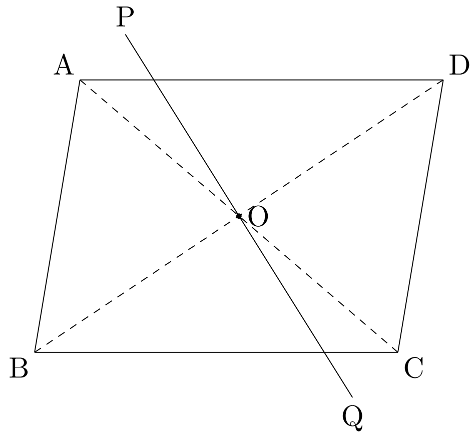
右の図の三角形で、△ADE と △ABC の面積比は $ab : cd$ になる。ちなみ右図のような三角形の中に三角形がある形でなくても、2 つの三角形の 1 つの角が共通 (同じ大きさ) であれば同じことは言える。



28 平行四辺形の対角線を通る直線

対角線の交点を通る直線によって、平行四辺形の面積は二等分される。

平行四辺形の仲間なら、同じことが言える。つまり、ひし形、長方形、正方形も対角線の交点を通る直線で、面積は二等分される。

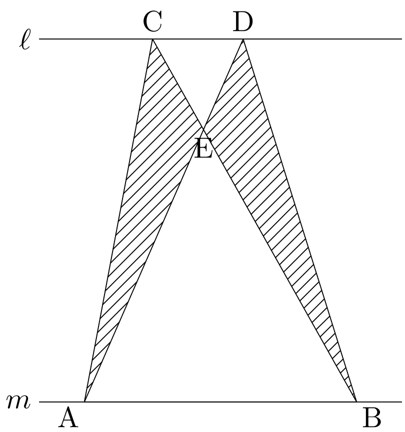


29 平行線の中での三角形の面積

△CAB=△DAB

△ACD=△BCD

△AEC=△BED

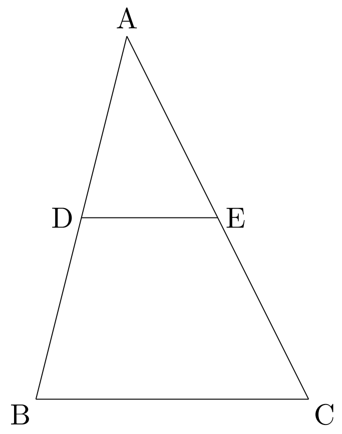


$\ell // m$

30 平行線と線分比 (三角形)

AD:AB=AE:AC=DE:BC

AD:DB=AE:EC



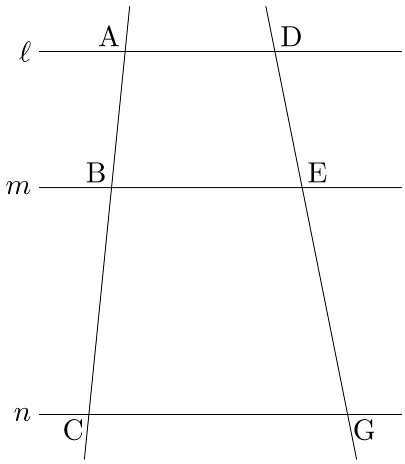
DE//BC

31 平行線と線分比 (平行線)

AC:BC=DF:EF

AB:BC=DE:EF

AB:AC=DE:DF



$\ell//m//n$

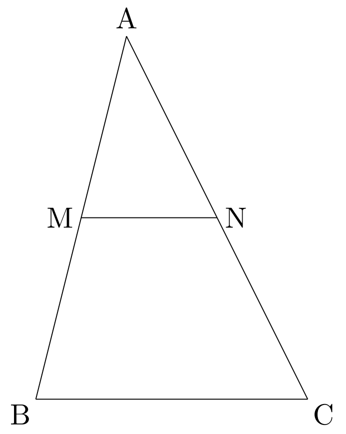
32 中点連結定理

右の三角形で、AM=MB,AN=NC ならば、

MN//BC,MN= $\dfrac{1}{2}$BC

AM=MB,MN//BC ならば、

AN=NC



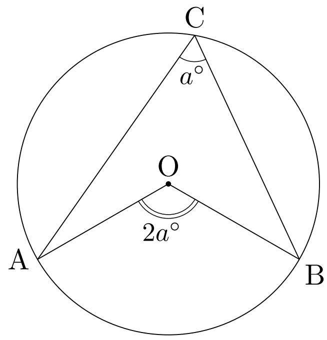
MN//BC

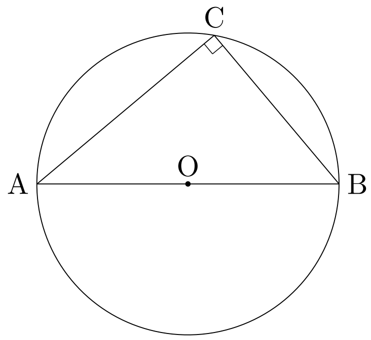
33 円周角の定理

$\angle \mathrm{ACB} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}$

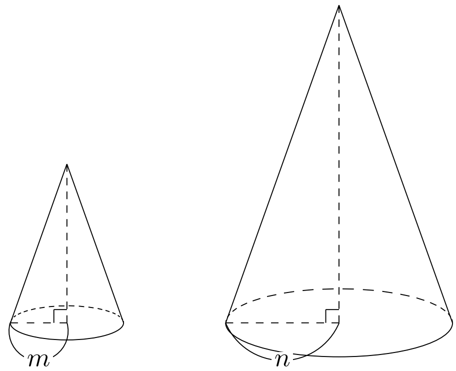
また、半円の弧に対する

円周角は 90° である。





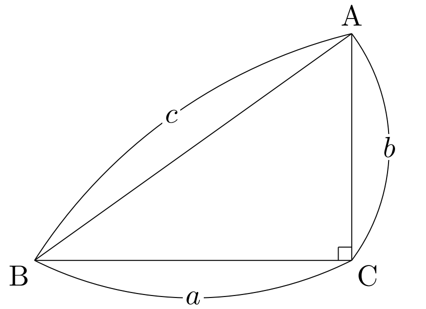
34 相似な図形の計量



①相似比が $m:n$ の平面図形がある。
周りの長さの比は $m:n$
面積比は $m^2:n^2$

②相似比が $m:n$ の立体図形がある。
表面積比は $m^2:n^2$
体積の比は $m^3:n^3$

35 三平方の定理 (ピタゴラスの定理)



①右の三角形で、$\angle \mathrm{C}=90^\circ$ ならば、
$c^2=a^2+b^2$

②$c^2=a^2+b^2$ ならば、$\angle \mathrm{C}=90^\circ$ である。

③覚えておきたい $a:b:c$
$a:b:c=3:4:5\cdots$(覚え方 : $3,4,5$)
$a:b:c=\sqrt{3};1:2\cdots$(覚え方 : $1,2,\sqrt{3}$)
$a:b:c=1:1:\sqrt{2}\cdots$(覚え方 : 1 : 1 : ルート 2)
$a:b:c=5:12:13$(覚え方 : $5,12,13$)
など無数にある。

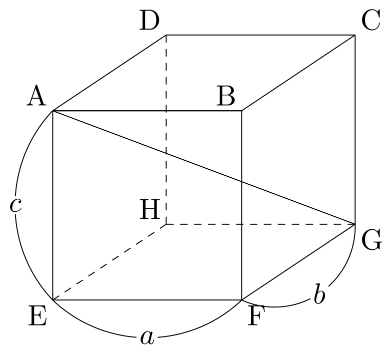
36 直方体・立方体の対角線

縦 a cm, 横 b cm, 高さ c cm の直方体の対角線 AG の長さ ℓ_c は、

$\ell_c = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

1 辺が a cm の立方体の対角線の長さ ℓ_r は、

$\ell_r = a\sqrt{3}$



参考サイト:emath($http://emath.s40.xrea.com/$)
emath を導入して 1 年経ちました。これもこれまでお世話していただいた皆様のおかげです。お世話になった emath 掲示板やそこで教えてくださった皆様には、非常に感謝しています。今回の公式集は 1 年の節目で作ってみました。掲示板から参考にし作ったものや、途中出てくる 3D さいころなど参考にして取り入れたものなど、いろいろありますが、これも勉強の一つとして受け止めております。これからも皆様よろしくお願いします。重ね重ねありがとうございました。

2012 年 7 月吉日　相城　啓志