$x = a\cos\alpha + b\cos\beta, y = a\sin\alpha - b\sin\beta, x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ が成り立つとき,

(1) $\alpha + \beta$ の値を求めよ。

(2) $x\cos\alpha + y\sin\alpha$ の値を求めよ。

〔東北学院大〕

(1) 与式より

$(a\cos\alpha + b\cos\beta)^2 + (a\sin\alpha - b\sin\beta)^2 = a^2 + b^2$

$a^2\cos^2\alpha + 2ab\cos\alpha\cos\beta + b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\alpha - 2ab\sin\alpha\sin\beta + b^2\sin^2\beta = a^2 + b^2$

$a^2 + b^2 + 2ab(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = a^2 + b^2$

$2ab(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta) = 0$ $ab \neq 0$ より

$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 0$ ここで左辺は $\cos(\alpha+\beta)$ とおけるので

$\cos(\alpha+\beta) = 0$ より $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (nは整数) //

(2)

与式より

$(a\cos\alpha + b\cos\beta)\cos\alpha + (a\sin\alpha - b\sin\beta)\sin\alpha$

$= a\cos^2\alpha + b\cos\alpha\cos\beta + a\sin^2\alpha - b\sin\alpha\sin\beta$

$= a + b(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$

(1)より $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 0$ であるから

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = a$ //