



4
解と係数



2次方程式 $(x-1)(x-2) + (x-2)(x-3) + (x-3)(x-1) = 0$ の2つの解を α, β とするとき、次の式の値を求めよ。次のことを証明せよ。

(1) $(\alpha-1)(\beta-1)$

(2) $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)} + \frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}$

(1) 勘定より

$$(x-1)(x-2) + (x-2)(x-3) + (x-3)(x-1) = 3(x-\alpha)(x-\beta) \text{ とおける } \textcircled{1}$$

$x=1$ を代入すると

$$3(1-\alpha)(1-\beta) = 2$$

$$3(\alpha-1)(\beta-1) = 2 \quad \therefore (\alpha-1)(\beta-1) = \frac{2}{3}$$

(2) ①の①で $x=0$ とおくと

$$3\alpha\beta = 2 + 6 + 3 \quad \alpha\beta = \frac{11}{3}$$

①の②で $x=2$ とおくと

$$3(2-\alpha)(2-\beta) = -1$$

$$3(\alpha-2)(\beta-2) = -1 \quad \therefore (\alpha-2)(\beta-2) = -\frac{1}{3}$$

これと①の結果より

$$\text{与式} = \frac{3}{\frac{11}{3}} + \frac{3}{2} - 3$$

$$= \frac{6+33-66}{22}$$

$$= -\frac{27}{22} \quad \frac{66}{27}$$

