$nC_{4?}$

2つのサイコロを同時に投げる試行 T を行うとする。この試行 T においてサイコロの出た目の差の絶対値が1以下である事象をAで表わす。以下の問いに答えよ。

(1) Aが起こる確率を求めよ。

(2) 試行 T をくり返して m 回目に初めて A が起こる確率を求めよ。

(3) n を正の整数とする。試行 T をくり返し，$2n$ 回以下の偶数回目で初めて A が起こる確率 p_n を求めよ。

〔早稲田改〕

(1)

	1	2	3	4	5	6
1	O	O				
2	O	O	O			
3		O	O	O		
4			O	O	O	
5				O	O	O
6					O	O

$\dfrac{16}{36} = \dfrac{4}{9}$

(2) $m-1$ 回目までの試行の確率は $\dfrac{5}{9}$ で m 回目に A が起これば良いので

$\left(\dfrac{5}{9}\right)^{m-1} \dfrac{4}{9}$ $\qquad \therefore \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{5}{9}\right)^{m-1}$

(3) 2回以下で起こるということは p_n を求めると

$p_n = P_2 + P_4 + P_6 + P_8 + \cdots + P_{2n}$ とし，$P_2 = \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{4}{9}$ であるから

$= P_2 + P_2\left(\dfrac{5}{9}\right)^2 + P_2\left(\dfrac{5}{9}\right)^4 + P_2\left(\dfrac{5}{9}\right)^6 \cdots + P_2\left(\dfrac{5}{9}\right)^{2(m-1)}$

すなわち

$$p_n = \sum_{m=1}^{n} P_2\left(\frac{5}{9}\right)^{2(m-1)}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{25}{81}\right)^{m-1}$$

$$= \frac{20}{81} \cdot \frac{1-\left(\frac{25}{81}\right)^n}{1-\frac{25}{81}}$$

$$= 20 \cdot \frac{1-\left(\frac{25}{81}\right)^n}{81-25}$$

$$= \frac{5}{14}\left\{1-\left(\frac{25}{81}\right)^n\right\}$$

$\therefore p_n = \dfrac{5}{14}\left\{1-\left(\dfrac{25}{81}\right)^n\right\}$