

赤玉2個と白玉7個が入った袋を用意し、玉を1個取り出し袋に戻す試行を k 回繰り返す。1度でも赤玉が出れば0点、すべて白玉のときは k 点とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 得点が0点となる確率を、 k を用いて表わせ。
- (2) 得点の期待値を、 k を用いて表わせ。
- (3) 得点の期待値が最大になる k の値を求めよ。

(1) k 回の試行のうち1回は赤玉が出る
0点 ∴ 全部白玉である確率は $(\frac{7}{9})^k$ である

[島根大]

$$1 - \left(\frac{7}{9}\right)^k$$

(2) 期待値は

$$0 \times \left\{ 1 - \left(\frac{7}{9}\right)^k \right\} + k \left(\frac{7}{9}\right)^k$$

$$k \left(\frac{7}{9}\right)^k$$

(3) $E_k = k \left(\frac{7}{9}\right)^k$ とし

$$\frac{E_{k+1}}{E_k} > 1 \rightarrow \frac{(k+1) \left(\frac{7}{9}\right)^{k+1}}{k \left(\frac{7}{9}\right)^k} = \frac{7}{9} \frac{k+1}{k} > 1$$

これを整理すると

$$7(k+1) > 9k$$

$$-2k > -7$$

$$k < 3.5$$

試行が3以下ならば $E_{k+1} > E_k$ となり

試行が4以上ならば $E_k > E_{k+1}$ となり

つまり

$$E_1 < E_2 < E_3 < E_4 > E_5 > E_6 \dots$$

数楽 <http://www.mathtext.info/>

∴ $k=4$ のとき最大