

2つのサイコロを同時に投げる試行 T を行うとする。この試行 T においてサイコロの出た目の差の絶対値が 1 以下である事象を A で表す。以下の問いに答えよ。

- (1) A が起こる確率を求めよ。
- (2) 試行 T を繰り返して m 回目に初めて A が起こる確率を求めよ。
- (3) n を正の整数とする。試行 T をくり返し、 $2n$ 回以下の偶数回目で初めて A が起こる確率 p_n を求めよ。また p_n が $\frac{2}{9}$ より大きくなる最小の n を求めよ。

[早稲田大]

(1) $(1,2) (2,1) (3,2) (3,4) (4,5) (4,3) (5,4) (4,5) (5,6) (6,5)$
 $(1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (6,6)$

$$\frac{16}{36} = \frac{4}{9} \quad \frac{4}{9}$$

(2) A が起こらない確率は

$$1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \text{ と } (m-1) \text{ 回目まで連続して } m \text{ 回目で}$$

A が起こると

$$\left(\frac{5}{9}\right)^{m-1} \cdot \frac{4}{9}$$

$$\frac{4}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{m-1}$$

(3)

$$p_n = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^3 + \frac{4}{9} \left(\frac{5}{9}\right)^5 + \dots + \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{2n-1}$$

$$= \sum_{m=1}^n \frac{4}{9} \left(\frac{5}{9}\right)^{2m-1} = \sum_{m=1}^n \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{2(m-1)+1}$$

$$= \sum_{m=1}^n \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{25}{81}\right)^{m-1} = \frac{20}{81} \cdot \frac{1 - \left(\frac{25}{81}\right)^n}{1 - \frac{25}{81}} = \frac{20}{56} \left\{ 1 - \left(\frac{25}{81}\right)^n \right\}$$

$$\therefore p_n = \frac{5}{14} \left\{ 1 - \left(\frac{25}{81}\right)^n \right\}$$

1 $\frac{81}{25}$ 数楽 <http://www.mathtext.info/>

$$\frac{5}{14} \left\{ 1 - \left(\frac{25}{81}\right)^n \right\} > \frac{2}{9} \text{ のとき } 1 - \left(\frac{25}{81}\right)^n > \frac{8}{5} \text{ かつ } \left(\frac{25}{81}\right)^n < 0.2 \Rightarrow \dots$$

$$\frac{25}{81} \approx 0.30 \quad \left(\frac{25}{81}\right)^2 = 0.09 \dots \text{ かつ } \left(\frac{25}{81}\right)^n < 0.2 \text{ と成る最小の } n \text{ は } 2 \quad \underline{n=2}$$