数IIB　整式3　H31.3.10

a, b, c は整数で，$0 < a < b$ とする。x についての整式 $x^3 - (a+b)x^2 + abx - 23$ が $x - c$ で割り切れるような a, b, c の値をすべて求めよ。〔千葉大〕

$x-c$ で割り切れるということは $x=c$ のとき
与式 $=0$ となるので
$x=c$ を与式に代入すると、

$c^3-(a+b)c^2+abc-23=0$ とし、変形すると
$c\{c^2-(a+b)c+ab\}=23$
$c(c-a)(c-b)=23$

ここで a, b, c は整数であることと、23が
素数であることから

$c=\pm1$ または $c=\pm23$ と考えられる

(i) $c=1$ のとき $(1-a)(1-b)=23$ となる a, b は
$a=24, b=2$ …① または $a=2, b=24$ …②
$0<a<b$ より①は不適　　$c=1$ のとき $a=2, b=24$

(ii) $c=23$ のとき $23(23-a)(23-b)=23$ となるのは
$a=22, b=22$ のときで $0<a<b$ と反するので不適

(iii) $c=-1$ のとき $-(-1-a)(-1-b)=23$
$-(1+a)(1+b)=23$ となるためには $a<0$ または $b<0$ となるので不適

(iv) $c=-23$ のとき $-23(-23-a)(-23-b)=23$
$-23(23+a)(23+b)=23$ となるためには $a<0$ または $b<0$ となるので不適

以上より
$a=2, b=24, c=1$