

整数11

(1) 108の正の約数の個数を求めよ。

(2) a, b, c, d を自然数とし $a \geq c$ とする。

$m = 2^a 3^b, n = 2^c 3^d$ について、 m, n の正の約数の個数がそれぞれ80, 72で、 m と n の正の公約数の個数が45であるという。このとき、 a, b, c, d を求めよ。

[群馬大]

(1)
$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 108} \\ \underline{22} \\ 27 \end{array}$$

$108 = 2^2 3^3$

$(1+2) \times (1+3) = 12 \times 4 = 48$

(2) $(a+1)(b+1) = 80 \dots \textcircled{1} \quad (c+1)(d+1) = 72 \dots \textcircled{2}$

$a \geq c$ かつ 最大公約数は $2^c 3^b$ かつ $2^c 3^d$ であるから

$2^c 3^d$ は n と一致するから不適

\therefore 最大公約数は

$2^c 3^b$ であり、このとき

$(c+1)(b+1) = 45$

$\textcircled{1}$ より $b+1 = \frac{80}{a+1} \quad \frac{c+1}{a+1} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16} \dots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}$ より $c+1 = \frac{72}{d+1} \quad \frac{b+1}{d+1} = \frac{45}{72} = \frac{5}{8} \dots \textcircled{4}$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$ より $c+1=9 \quad b+1=5$ であるから $(c+1)(b+1)=45$

と等しい。このとき $a+1=16 \quad d+1=8$ である。

$a=15, b=4, c=8, d=7$