

x, y を実数とするとき、次の式の最小値を求め、そのときの x, y の値を求めなさい。

$$x^2 - 6xy + 10y^2 + 2x - 2y + 12$$

与式を x について整理すると

$$\begin{aligned} & x^2 + (-6y+2)x + 10y^2 - 2y + 12 \\ &= x^2 + 2(-3y+1)x + 10y^2 - 2y + 12 \\ &= \{x + (-3y+1)\}^2 - (-3y+1)^2 + 10y^2 - 2y + 12 \\ &= (x-3y+1)^2 - 9y^2 + 6y - 1 + 10y^2 - 2y + 12 \\ &= (x-3y+1)^2 + y^2 + 4y + 11 \\ &= (x-3y+1)^2 + (y+2)^2 - 4 + 11 \\ &= (x-3y+1)^2 + (y+2)^2 + 7 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

①より

$$\begin{cases} x-3y+1=0 \\ y+2=0 \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

このとき最小値 7 になる

②を解いて

$$y = -2$$

$$x - 6 + 1 = 0$$

$$x = 5$$

よって

$$x=5, y=-2 \text{ のとき最小値 } 7 \text{ になる}$$
