

$$\begin{array}{r} 31 \\ 7 \\ \hline 271 \end{array}$$

$$31x + 22y = 3$$

方程式

$$31x + 22y = 3$$

の整数解をすべて求めよ。

32
155
124
22
271
9
271
9

$$\begin{aligned} 31 &= 22 \times 1 + 9 & \rightarrow 9 &= 31 - 22 \times 1 \\ 22 &= 9 \times 2 + 4 & \rightarrow 4 &= 22 - 9 \times 2 \\ 9 &= 4 \times 2 + 1 & \rightarrow 1 &= 9 - 4 \times 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 9 - 2 \times (22 - 9 \times 2) \\ &= 9 - 2 \times 22 + 9 \times 4 \\ &= 9 \times 5 - 2 \times 22 \\ &= (31 - 22 \times 1) \times 5 - 2 \times 22 \\ &= 31 \times 5 - 22 \times 5 - 2 \times 22 \\ &= 31 \times 5 - 22 \times 7 \end{aligned}$$

すなわち $31 \times 5 - 22 \times 7 = 1$ とおきなおして 両辺3倍して

$$31 \times 15 + 22 \times (-21) = 3 \quad \text{と} \text{お} \text{き} \text{お} \text{し} \text{て}$$

方程式を満たす整数 (x, y) の解のひとつは $(x, y) = (15, -21)$

とあることを

$$\begin{aligned} 31x + 22y &= 3 \\ -) \quad 31 \times 15 + 22 \times (-21) &= 3 \\ \hline 31(x-15) + 22(y+21) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{よ} \text{し} \quad 31(x-15) = -22(y+21)$$

すなわち 31 と 22 は互いに素なので

$$\begin{aligned} \rightarrow x-15 &= 22k & k \text{ は整数} \\ y+21 &= -31k \\ \text{よ} \text{し} \\ \begin{cases} x &= 22k + 15 \\ y &= -31k - 21 \end{cases} & k \text{ は整数} \end{aligned}$$