三角形ABCにおいて, 次の関係が成り立つとき, 三角形ABCは直角三角形, または, 二等辺三角形であることを示せ。

$$a\cos A = b\cos B$$

ただし, a, b はそれぞれ三角形ABCの辺BC, ACの長さを表し, A, B はそれぞれ三角形ABCの∠BAC, ∠ABCを表す。 〔奈良教育大〕

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

として与式に代入すると

$$a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = b\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

両辺に $2abc$ をかけると

$$a^2(b^2+c^2-a^2) = b^2(a^2+c^2-b^2)$$

$$\cancel{a^2b^2}+a^2c^2-a^4 = \cancel{a^2b^2}+b^2c^2-b^4$$

$$a^4-b^4-c^2(a^2-b^2)=0$$

$$(a^2-b^2)(a^2+b^2)-c^2(a^2-b^2)=0$$

$$(a^2-b^2)\{(a^2+b^2)-c^2\}=0$$

$$(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$$

$a+b\neq 0$ より この方程式の解は

$a^2+b^2-c^2=0$ …① または $a-b=0$ …②

①より $a^2+b^2=c$ が成り立つので $\triangle ABC$ が直角三角形,

②より $a=b$ が成り立つので $\triangle ABC$ が二等辺三角形であることがいえるので 題意を満たす