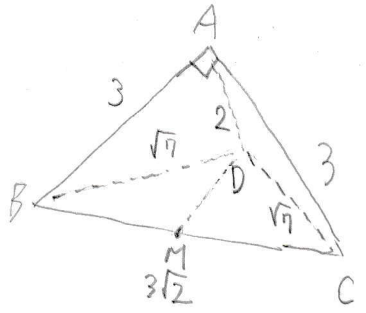
正余弦45

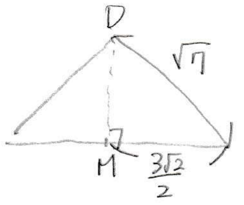
四面体 ABCD において, AB=AC=3, $\angle BAC = 90^\circ$, AD= 2, BD=CD= $\sqrt{7}$ であり, 辺 BC の中点を M とする。このとき, BC= $\boxed{ア}$, DM= $\boxed{イ}$, AM= $\boxed{ウ}$, $\angle DAM = \boxed{エ}$ であり, 四面体 ABCD の体積は $\boxed{オ}$ である。〔標準問題〕



ア BC 三平方の定理より

$3\sqrt{2}$

イ DM



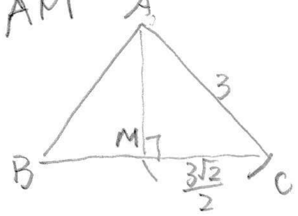
三平方の定理より

$$DM = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{7 - \frac{9}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

ウ AM

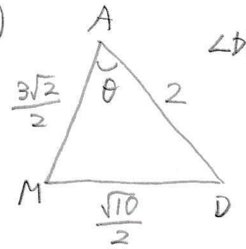


$\triangle AMC \backsim \triangle CAB$

$AM = CM$

$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

エ



$\angle DAM = \theta$ として $\triangle AMD$ で余弦定理を用いると

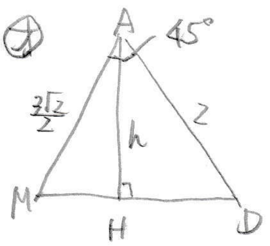
$$\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2^2 - 2 \cdot \cancel{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cos\theta$$

$$\frac{5}{2} = \frac{9}{2} + 4 - 6\sqrt{2}\cos\theta$$

$6\sqrt{2}\cos\theta = 6$　　$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$　　$0 < \theta < 180^\circ$ より

$\theta = 45^\circ$

オ



$\triangle AMD$ の面積の関係から AH (立体の高さ) を求める

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot 2\sin 45 = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\cancel{2}} h \longrightarrow \sqrt{10}h = 6,\quad h = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$\triangle BDC = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DM = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

∴ 体積は

$$\frac{3\sqrt{5}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{\sqrt{10}}_{\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$