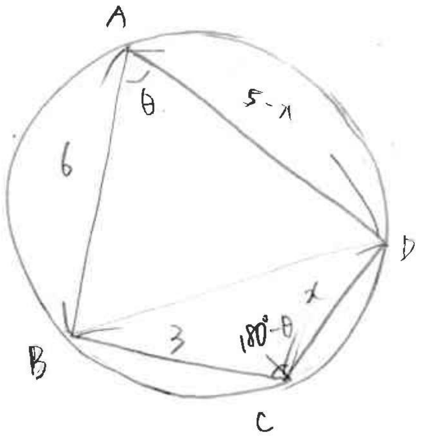
山形大



(1)

$\angle BAD=\theta$ とすると $\angle BCD=180°-\theta$

であるから

$\cos\angle BAD=\cos\theta$

$\cos\angle BCD=\cos(180-\theta)=-\cos\theta$

よって $\cos\angle BAD+\cos\angle BCD=0$

(2) $\angle BAD=\theta$として

$\triangle ABD$で余弦定理より

$BD^2=36+(5-x)^2-2\cdot 6\cdot(5-x)\cos\theta$ …①

$\triangle BCD$で余弦定理より

$BD^2=9+x^2+2\cdot 3\cdot x\cos\theta$ …②

①、②より

$36+(5-x)^2-12(5-x)\cos\theta=9+x^2+6x\cos\theta$

$61-10x+x^2-(60-12x)\cos\theta=9+x^2+6x\cos\theta$

$(6x-60)\cos\theta=10x-52$

$\cos\theta=\dfrac{5x-26}{3(x-10)}$

よって

$\cos\theta=\dfrac{26-5x}{3(10-x)}$

(3)

$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{(26-5x)^2}{9(10-x)^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{9(10-x)^2-(26-5x)^2}{9(10-x)^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{224+80x-16x^2}{9(10-x)^2}}$

$=\dfrac{4\sqrt{14+5x-x^2}}{3(10-x)}=\dfrac{4\sqrt{(7-x)(2+x)}}{3(10-x)}$

$\triangle ABD$の面積

$=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot(5-x)\cdot\dfrac{4\sqrt{(7-x)(2+x)}}{3(10-x)}$

$=\dfrac{4(5-x)\sqrt{(7-x)(2+x)}}{10-x}$ … ①

$\triangle BCD$の面積

$=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot x\cdot\dfrac{4\sqrt{(7-x)(2+x)}}{3(10-x)}$

$=\dfrac{2x\sqrt{(7-x)(2+x)}}{10-x}$ … ②

求める面積 $S(x)=$ ①+②

よって

$S(x)=\dfrac{(20-4x+2x)\sqrt{(7-x)(2+x)}}{10-x}$

$=2\sqrt{(7-x)(2+x)}$

$S(x)=2\sqrt{(7-x)(2+x)}$

(4) (3)より

$(7-x)(2+x)$の最大値を考えればよい

$f(x)=(7-x)(2+x)$　$0<x<5$とすると

$f(x)=-x^2+5x+14$

$=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{81}{4}$　$0<\dfrac{5}{2}<5$

よって $f(x)$は$x=\dfrac{5}{2}$のとき最大値 $\dfrac{81}{4}$ をとる

このとき $S(x)=2\cdot\dfrac{9}{2}=9$

以上より

$S(x)$は$x=\dfrac{5}{2}$のとき最大値9をとる