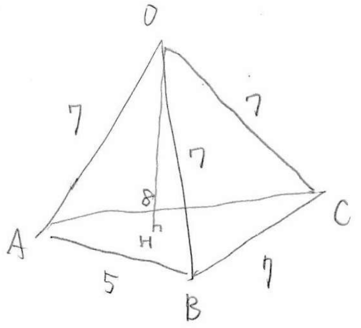


(1) $\angle BAC = \theta$ とすると $\triangle ABC$ で余弦定理より

$49 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos\theta$

$80 \cos\theta = 40$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$　よって $\angle BAC = 60^\circ$

$0 < \theta < 180$ より

(2)

$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \sin 60^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

$10\sqrt{3}$

(3) $AH = BH = CH$ であり AH は $\triangle ABC$ の外接円の半径である.
よって正弦定理より 外接円の半径を r とすると

$\frac{7}{\sin 60^\circ} = 2r$　　$r = \frac{7}{\sqrt{3}}$　　よって $AH = r$ より　$AH = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

(4)

$\triangle AOH$ で三平方の定理より

$OH = \sqrt{7^2 - \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{49 - \frac{49}{3}} = \sqrt{\frac{98}{3}} = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

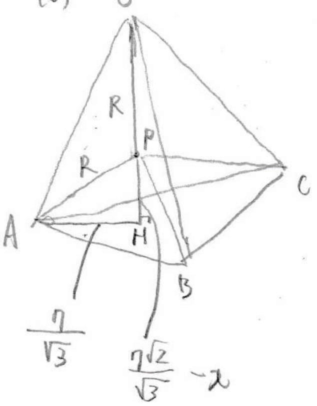
よって 四面体 OABC の体積 V は.

$V = \triangle ABC \times OH \times \frac{1}{3}$

$= 10\sqrt{3} \times \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{70\sqrt{2}}{3}$　　　$\frac{70\sqrt{2}}{3}$

(5)



外接する球の中心を P として $OP = AP = BP = CP = R$ (球の半径) とすると

$\triangle APH$ で $AP = R$, $PH = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - R$, $AH = \frac{7}{\sqrt{3}}$ であるから

三平方の定理より

$R^2 = \left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - R\right)^2$

$\cancel{R^2} = \frac{49}{3} + \frac{98}{3} - \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R + \cancel{R^2}$

$\frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R = \frac{147}{3} \rightarrow \frac{14\sqrt{6}}{3}R = \frac{147}{3} \rightarrow 14\sqrt{6}R = 147$

$R = \frac{21}{2\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{4}$　　$\frac{7\sqrt{6}}{4}$