座標空間において, 立方体 OABC−DEFG の頂点を

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(3,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(3,\ 3,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 3,\ 0),$$
$$\mathrm{D}(0,\ 0,\ 3),\ \mathrm{E}(3,\ 0,\ 3),\ \mathrm{F}(3,\ 3,\ 3),\ \mathrm{G}(0,\ 3,\ 3)$$

とし, OD を 2 : 1 に内分する点を K, OA を 1 : 2 に内分する点を L とする。BF 上の点 M, FG 上の点 N および K, L の 4 点は同一平面上にあり, 四角形 KLMN は平行四辺形であるとする。

(1) 四角形 KLMN の面積をもとめよう。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{LK}}$ を成分で表わすと

$$\overrightarrow{\mathrm{LK}} = \left(\boxed{\textbf{アイ}},\ \boxed{\textbf{ウ}},\ \boxed{\textbf{エ}}\right)$$

となり, 四角形 KLMN が平行四辺形であることより, $\overrightarrow{\mathrm{LK}} = \boxed{\textbf{オ}}$ である。

$\boxed{\textbf{オ}}$ にあてはまるものを, 次の 0 〜 3 のうちから一つ選べ。

0 $\overrightarrow{\mathrm{ML}}$　　1 $\overrightarrow{\mathrm{LM}}$　　2 $\overrightarrow{\mathrm{NM}}$　　3 $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$

ここで, M$(3,\ 3,\ s)$, N$(t,\ 3,\ 3)$ と表わすと, $\overrightarrow{\mathrm{LK}} = \boxed{オ}$ であるので, $s = \boxed{\textbf{カ}}$, $t = \boxed{\textbf{キ}}$ となり, N は FG を 1 : $\boxed{\textbf{ク}}$ に内分することが分かる。
また, $\overrightarrow{\mathrm{LK}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{LM}}$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{LK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LM}} = \boxed{\textbf{ケ}},\ |\overrightarrow{\mathrm{LK}}| = \sqrt{\boxed{\textbf{コ}}},\ |\overrightarrow{\mathrm{LM}}| = \sqrt{\boxed{\textbf{サシ}}}$$

となるので, 四角形 KLMN の面積は $\sqrt{\boxed{\textbf{スセ}}}$ である。

〔次のページに続く〕

(2) 四角形 KLMN を含む平面を α とし, 点 O を通り平面 α と垂直に交わる直線を ℓ, α と ℓ の交点を P とする。$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と三角錐 OLMN の体積を求めよう。

P(p, q, r) とおくと, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{LK}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{LM}}$ と垂直であるから, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{LK}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{LM}} =$ $\boxed{\text{ソ}}$ となるので, $p = \boxed{\text{タ}}\, r,\ q = \dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\, r$ であることがわかる。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PL}}$ が垂直であることにより $r = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ となり, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ を求めると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \frac{\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$$

である。$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ は三角形 LMN を底面とする三角錐 OLMN の高さであるから, 三角錐 OLMN の体積は $\boxed{\text{フ}}$ である。

〔13 センター試験〕