

四面体 $OABC$ において、 $\angle BOC = \angle COA = \angle AOB = 60^\circ$ とする。頂点 A から、3 点 O, B, C を通る平面に下ろした垂線を AH とし、点 H から直線 OB に下ろした垂線を HD とする。辺 OA, OB, OC の長さを a, b, c として、次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OB}$ および $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OC}$ を、それぞれ a, b, c で表わせ。
- (2) 線分 OH は $\angle BOC$ を 2 等分することを示せ。
- (3) $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{OB}$ であることを示せ。さらに線分 OD および線分 OH の長さをそれぞれ a で表わせ。
- (4) 四面体 $OABC$ の体積を a, b, c で表わせ。

〔新潟大〕