空間内に, 同一平面上にない相異なる 4 点 O, A, B, C がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は互いに直交し, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 1,\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 2,\ |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 3$ である。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ と表すとき, 次の各問に答えよ。

(1) 線分 BC を $t : (1-t)$ $(0 < t < 1)$ に内分する点を K とし, $\overrightarrow{\mathrm{OK}} = \vec{k}$ と表す。このとき, 内積 $\vec{a}\cdot\vec{k}$ を求めよ。また, $\vec{k}$ の大きさ $|\vec{k}|$ を t を用いて表せ。

(2) 三角形 OAK で, O から AK に引いた垂線の足を H とする。このとき, AH : HK を $|\vec{a}|, |\vec{k}|$ を用いてできるだけ簡単に表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $t, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\left(\boxed{}\right)\vec{a} + \left(\boxed{}\right)\vec{b} + \boxed{}\,\vec{c}}{\boxed{}}$$

の形に表せ。空欄にあてはまる式を求めよ。

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が 3 点 A, B, C の作る平面に垂直であるとき, t の値を求めよ。

〔早稲田大〕