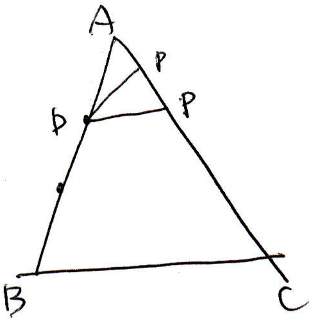
△ABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k$ である。辺 AB 上に $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす点 D をとる。辺 AC 上に $|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ を満たす点 P が 2 つ存在するための k の条件を求めなさい。ただし，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ は，それぞれベクトルの長さを表し，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 2 つのベクトルの内積を表す。

〔一橋大〕



$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$　$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$　$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$

とする

$\overrightarrow{DP}=t\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}$　$(\because\ 0\leqq t\leqq 1)$

$\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{a}$ より

$|\overrightarrow{DP}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{BC}|$ は　$|t\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}|=\frac{1}{3}|\vec{c}-\vec{a}|$ となり

両辺を2乗すると

$$t^2|\vec{c}|-\frac{2}{3}t\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{1}{9}|\vec{a}|^2=\frac{1}{9}|\vec{c}|^2-\frac{2}{9}\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{1}{9}|\vec{a}|^2$$

$$9t^2-6kt+|\vec{a}|^2=1-2k+|\vec{a}|^2$$

$$9t^2-6kt+2k-1=0 \quad \cdots ①$$

①を満たす t が2つあればよいので $D/4>0$ とすると

$$9k^2-9(2k-1)>0$$

$$k^2-2k+1>0$$

$$(k-1)^2>0 \quad \cancel{k\neq 0}\ k\neq 1 \quad \cdots ②$$

また①は　$(3t-1)(3t-2k+1)=0$

$$\begin{array}{ccc} 3 & -1 & \to -3 \\ 3 & -2k+1 & \to -6k+3 \end{array}$$

$t=\frac{1}{3},\ \frac{2k-1}{3}$

$0\leqq\frac{2k-1}{3}\leqq 1$

$0\leqq 2k-1$　　$\frac{2k-1}{3}\leqq 1$

$\frac{1}{2}\leqq k$　　$2k\leqq 4$

$k\leqq 2$

$\frac{1}{2}\leqq k\leqq 2$　これと② より

$\frac{1}{2}\leqq k<1,\ 1<k\leqq 2$