三角形 ABC の外心を O とする。線分 OA, OB を 2 辺とする平行四辺形の第 4 頂点を D とし, 線分 OC, OD を 2 辺とする平行四辺形の第 4 頂点を H とする。

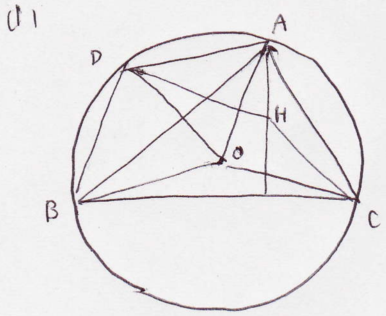
(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{OH}=\vec{h}$ として, $\vec{h}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表わせ。

(2) H は三角形 ABC の頂点 A から対辺 BC へおろした垂線の上にあることを証明せよ。

(3) 三角形 ABC において, $\angle A=60^\circ$, $\angle B=45^\circ$, 外接円の半径を r として, (1) における $\vec{h}$ の大きさを r を用いて表わせ。

〔鳥取大〕

(1)



$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DH}$$
$$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$$
$$=\vec{b}+\vec{a}+\vec{c}$$
$$\therefore\ \vec{h}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

(2)

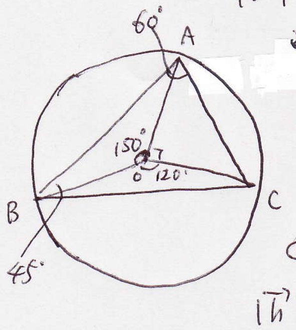
$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}$$
$$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$
$$=\vec{b}+\vec{c}$$
$\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}-\vec{b})$$
$$=|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2$$
$$=0$$

よって $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}$ の内積が 0 であるから $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ となり題意を証明した.

(3)

$$|\vec{h}|^2=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$$
$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})\ \cdots①$$



となり ここで

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=r\cdot r\cos 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}r^2$$
$$\vec{a}\cdot\vec{c}=r\cdot r\cos 90^\circ=0$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=r\cdot r\cos 120=-\frac{1}{2}r^2$$ となり

①は次のようになる

$$|\vec{h}|^2=r^2+r^2+r^2+2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r^2-\frac{1}{2}r^2\right)$$
$$=3r^2-\sqrt{3}r^2-r^2=2r^2-\sqrt{3}r^2=(2-\sqrt{3})r^2\ \cdots②$$

②より $|\vec{h}|=\sqrt{2-\sqrt{3}}\,r=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}\,r$

$$=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}\,r=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\,r=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\,r\qquad\therefore\ |\vec{h}|=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\,r$$