ベクトル $\overrightarrow{OA}=(7,\,5,\,3)$, $\overrightarrow{OB}=(2,\,9,\,4)$, $\overrightarrow{OC}=(6,\,1,\,8)$ があるとき,

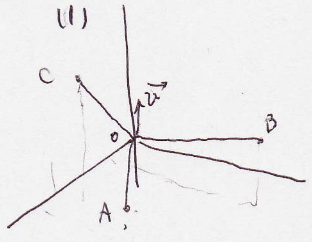
(1) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ によってつくられる平行四辺形の面積を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ の両方に垂直で大きさ 1 のベクトル $\vec{v}$ の成分を求めよ。

(3) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ によってつくられる平行六面体の体積を求めよ。

〔姫路工大〕

(1)



(1) $|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$ …の面
求める面積 $\theta=\angle AOB$

$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{49+25+9}=\sqrt{83}$ …②

$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{4+81+16}=\sqrt{101}$ …③

$\cos\theta=\dfrac{7\cdot2+5\cdot9+3\cdot4}{\sqrt{83}\cdot\sqrt{101}}=\dfrac{71}{\sqrt{83}\cdot\sqrt{101}}$ より $\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{5041}{8383}}$ から

$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{3342}{8383}}$ …④ ∴ ①.②.③.④より $\underline{\sqrt{3342}}$

(2) $\vec{v}=(x,y,z)$ とすると

$x^2+y^2+z^2=1$ …①

$\overrightarrow{OA}\perp\vec{v}$, $\overrightarrow{OB}\perp\vec{v}$ より

$7x+5y+3z=0$ …②

$2x+9y+4z=0$ …③

②.③より

$$\begin{array}{r} 28x+20y+12z=0 \\ -)\ 6x+27y+12z=0 \\ \hline 22x-7y=0 \end{array}$$

$y=\dfrac{22}{7}x$ …④

これを②に代入すると

$7x+\dfrac{110}{7}x+3z=0$

$3z=-\dfrac{159}{7}x$

$z=-\dfrac{53}{7}x$ …⑤

④.⑤をxについて解いて等式をつくると

$x=\dfrac{7}{22}y=-\dfrac{7}{53}z$ となり

$\dfrac{x}{7}=\dfrac{y}{22}=-\dfrac{z}{53}$ となる これらをkとおくと

$x=7k$, $y=22k$, $z=-53k$ となり

①に代入すると

$49k^2+484k^2+2809k^2=1$

$k^2=\dfrac{1}{3342}$

∴ $k=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3342}}$

$\vec{v}=(7k,\,22k,\,-53k)$ であるから

求める成分は

$\vec{v}=\left(\pm\dfrac{7}{\sqrt{3342}},\ \pm\dfrac{22}{\sqrt{3342}},\ \mp\dfrac{53}{\sqrt{3342}}\right)$

(∵ 複号同順)

(3)

平行六面体の高さは

$\overrightarrow{OC}$ の $\vec{v}$ への正射影であるから

$\vec{v}$ が大きさ1のベクトルであるから

$|\overrightarrow{OC}\cdot\vec{v}|$ で高さは求まる 高さhは

$h=\dfrac{|7\cdot6+22\cdot1-53\cdot8|}{\sqrt{3342}}$

$=\dfrac{360}{\sqrt{3342}}$

(1)の結果とあわせて

求める体積は

$\sqrt{3342}\times\dfrac{360}{\sqrt{3342}}$

$\underline{360}$