空間における 3 点 A(2, 2, 0), B(2, -3, $\sqrt{5}$), C(x, -1, 0) において $\angle ACB = \cos\theta$ とする。

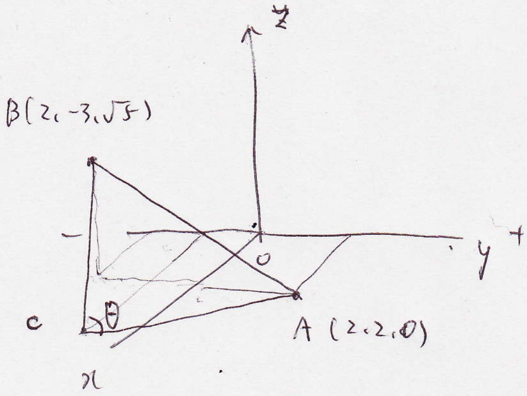
(1) $\cos\theta$ を x で表わせ。

(2) $\cos\theta$ のとりうる範囲を求めよ。

(3) △ABC が正三角形となるとき, 点 C を求めよ。

〔帯広畜産大〕

(1)



$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BC}|}$$

$\overrightarrow{AC} = (x-2, -3, 0)$　$\overrightarrow{BC} = (x-2, 2, -\sqrt{5})$ より

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(x-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{x^2-4x+13}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(x-2)^2+2^2+(-\sqrt{5})^2} = \sqrt{x^2-4x+13}$$

$$\cos\theta = \frac{(x-2)^2-6+0}{\sqrt{x^2-4x+13}\cdot\sqrt{x^2-4x+13}}$$

よって

$$\cos\theta = \frac{x^2-4x-2}{x^2-4x+13}$$

(2) (1)より $\cos\theta = \dfrac{(x-2)^2-6}{(x-2)^2+9}$ となり これより $\dfrac{(x-2)^2+9-15}{(x-2)^2+9}$ として $\cos\theta = 1-\dfrac{15}{(x-2)^2+9}$ となる

このとき $(x-2)^2+9 \geqq 9$ であるから 分母が9のとき $\cos\theta$ は最小になる

よって　$1-\dfrac{15}{9} \leqq \cos\theta < 1$　から　$-\dfrac{2}{3} \leqq \cos\theta < 1$

(3)

$\cos\theta$ の θ が $\theta = 60°$ のとき正三角形になるので

$$\cos 60° = \frac{x^2-4x-2}{x^2-4x+13} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x^2-4x-2}{x^2-4x+13}$$

$$x^2-4x+13 = 2x^2-8x-4$$

$$x^2-4x-17=0$$

$$(x-2)^2-21=0$$

$$(x-2)^2=21$$

$$x = 2\pm\sqrt{21}$$

よって　$C(2\pm\sqrt{21}, -1, 0)$