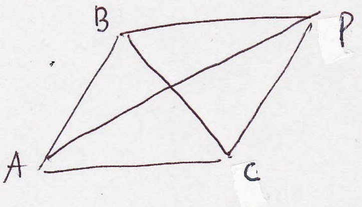
14

平面上の異なる 4 点 A, B, C, P は $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たしている。このとき, △ABC と △PBC の面積の比を求めよ。 〔東京電機大〕



A, B, C, P を左図のように設定すると

$$-2\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+4(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$$

$$-2\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AP}+4\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AP}=\vec{0}$$

$$-9\overrightarrow{AP}=-3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$$

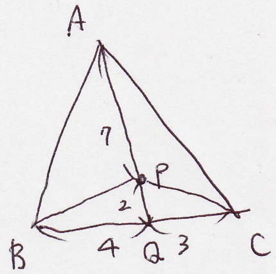
これより

$$\overrightarrow{AP}=\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{9}$$ となる

これを変形すると

$$\overrightarrow{AP}=\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{7}\cdot\frac{7}{9}$$ となることから

設定した図は正しくは次のようになる



つまり点PはBCを4:3に内分する点をQとすると
AQを7:2に内分する点である。
このことから
△ABCの面積をSとすると
△PBCの面積は $S\times\frac{2}{9}=\frac{2}{9}S$

よって
求める比は $S:\frac{2}{9}S=9:2$

9:2